Math Un 110-2

Matheseos. Systemata & methodi 143.

R

Zweytes Buch.

Elemente der Geometrie.

1. Die reine Geometrie.

2. Die gemischte Geometrie.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Erster Abschnitt.

Die reine Geometrie.

1. Von den ebenen Figuren; oder die Planimetrie.
2. Von den körperlichen Figuren; oder die Stereometrie.

Erstes Kapitel.

Von den ebenen Figuren, oder die Planimetrie.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

I. Erste Begriffe von Figuren.

§. 1.

Ein Punkt heißt, was keine Theile hat. Eine Linie heißt eine Länge ohne Breite, und ihre Grenzen sind Punkte. Eine Fläche heißt, was nur lang und breit ist, und ihre Grenzen sind Linien. Ein Körper heißt, was lang und breit und tief ist, und seine Grenzen sind Flächen.

§. 2.

Eine gerade Linie ist, deren Punkte in einer und derselben Richtung liegen.

Zusatz. 1. Jede gerade Linie läßt sich an beyden Seiten in derselben Richtung beliebig verlängern.

2. Von

2. Von jedem Punkte läßt sich zu jedem andern eine Linie ziehen, welche beyde Punkte verbindet.

3. Eine Linie schneidet die andre, wenn sie zwey Punkte, welche an verschiednen Seiten der andern und außerhalb derselben liegen, verbindet.

4. Zwey gerade Linien können einander nur in einem Punkte schneiden.

§. 3.

Eine ebene Fläche, oder eine Ebene, ist, in welcher jegliche zwey Punkte durch eine gerade Linie so verbunden werden können, daß solche Linie in der Fläche liegt.

§. 4.

Ein ebener geradlinichter Winkel ist die Neigung zweyer geraden Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebene aus einem Punkte ausgehen und nicht in einer geraden Linie liegen. Dieser Punkt heißt die Spitze oder der Scheitel; die Linien aber die Seiten oder Schenkel des Winkels, welchen sie einschließen.

Zusatz. Jede gerade Linie, welche durch einen innerhalb der Oefnung des Winkels befindlichen Punkt gehet, schneidet genugsam verlängert wenigstens einen seiner Schenkel.

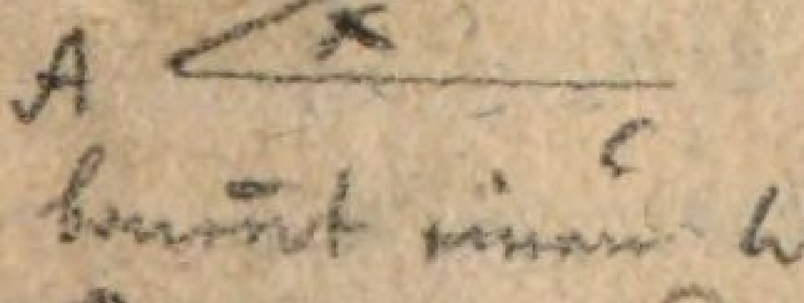
Anmerkung. Durch das Wort Winkel wird jederzeit ein ebener geradlinichter Winkel angezeigt, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

§. 5.

Zwey Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und Schenkel haben, indeß daß die beyden einander entgegengesetzten Schenkel in einer gera-

Eine krumme Fläche ist, von welcher kein Theil eben ist. Die Flächen, wovon ein Theil eben, ein Theil krumm ist, sind nicht krumme Flächen, sondern gemischte

Die Lage zweyer gerade sich schneidender Linien ist der Winkel derselben.



Man benennt einen Winkel durch die Buchstaben an seinen Schenkeln wie BAC, den Buchstaben am Scheitel in die Mitte. Oder auch durch einen eingeschriebenen kleinen Buchstaben, wie x

Winkel, deren Schenkel die Verlängerungen des andern sind, heißen Vertikalwinkel

geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel. Zwey Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt haben, indeß daß jede zwey einander entgegengesetzte Schenkel in einer geraden Linie liegen, heißen Scheitelwinkel.

Zusatz. Zwey gerade Linien, deren eine von einem Punkte der andern, welcher nicht der Endpunkt ist, ausgehet, machen Nebenwinkel. Zwey gerade Linien, welche einander schneiden, machen Scheitelwinkel.

§. 6.

Eine ebene Figur ist eine ebene Fläche, welche von allen Seiten begrenzt ist. Die Grenzen machen zusammen den Umfang oder den Perimeter der Figur aus. Sind solche Grenzen gerade Linien; so nennt man die Figur geradlinicht, und die geraden Linien ihre Seiten.

Anmerkung. Ist von Figuren und Linien die Rede; so denke man sie sich allemal in einer Ebene, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird.

Zusatz. 1. Jede durch einen Punkt innerhalb der Figur gelegte gerade Linie schneidet genugsam verlängert den Umfang wenigstens in zwey Punkten.

2. Zwey Figuren schneiden einander, wenn der Umfang der einen zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb der andern liegt; auch schneiden sie alsdenn einander wenigstens in zwey Punkten.

3. Eine geradlinichte Figur hat wenigstens drey Seiten, weil zwey gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden.

4. So viel Seiten eine geradlinichte Figur hat, so viel Winkel hat sie auch.

§. 7.

Größen decken einander, wenn man sie dergestalt auf einander legen kann, daß ihre Grenzen zusammen fallen.

Zusatz. 1. Gerade Linien, wie auch Winkel, sind einander gleich, wenn sie sich decken; und decken sich, wenn sie einander gleich sind. Sind sie ungleich: so fällt die Grenze des Größern außerhalb der Grenze des Kleinern.

2. Figuren, die sich decken, sind einander gleich; doch können sie auch einander gleich seyn, ohne sich zu decken, indem ein Stück, welches an der einen Seite fehlt, an der andern hervorragen kann.

§. 8.

Eine gerade Linie ist senkrecht oder perpendikular auf einer andern, wenn sie mit der andern gleiche Nebenwinkel macht. Die gleichen Nebenwinkel heißen rechte Winkel. Ein stumpfer Winkel heißt, der größer; ein spitzer, der kleiner als ein rechter Winkel ist.

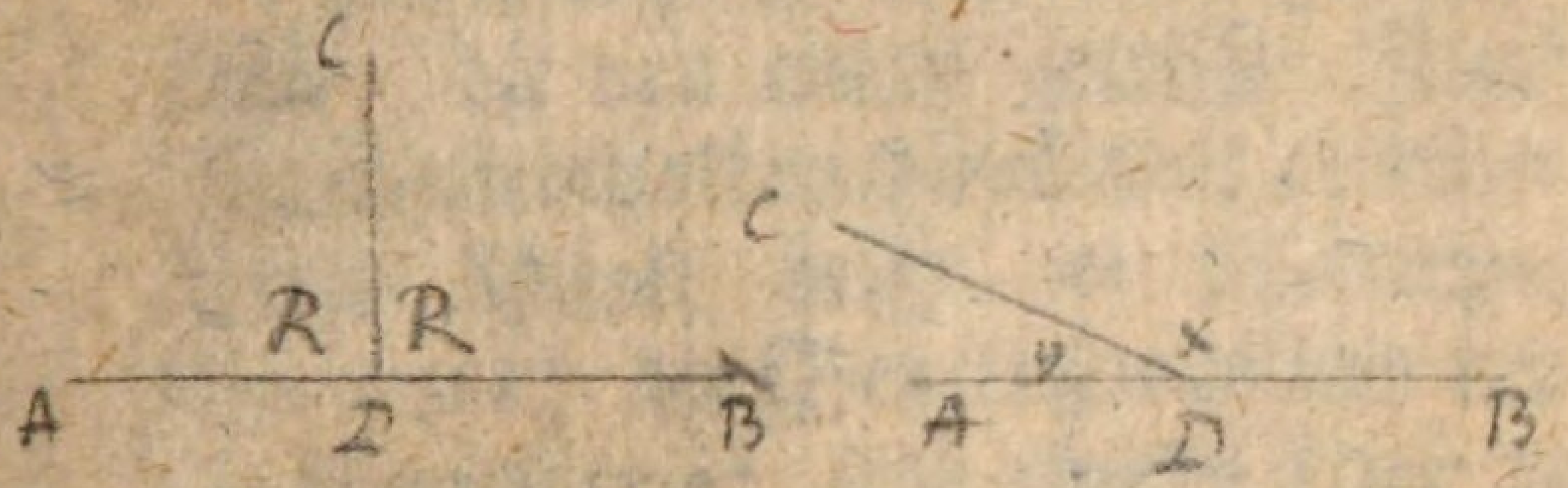
§. 9.

Geradlinichte Figuren heißen, nach der Zahl der Seiten oder der Winkel, dreyseitige, vierseitige, vielseitige Figuren; oder Triangel, Quadrangel, Polygone. Auch heißen sie regulär oder irregulär, je nachdem die Seiten, wie auch die Winkel, alle einander gleich sind oder nicht. Eine gerade Linie von einem Winkel der Figur bis zu einem entgegengesetzten heißt eine Diagonale.

§. 10.

Von den Triangeln heißt derjenige gleichseitig, der drey gleiche Seiten hat; gleichschenklicht, der

zwey



Man bezeichnet den rechten Winkel gewöhnlich durch R.

zwey gleiche Seiten hat; ungleichseitig, der drey ungleiche Seiten hat.

Ferner heißt von den Triangeln derjenige rechtwinklicht, der einen rechten Winkel hat, stumpfwinklicht, der einen stumpfen Winkel hat; spitzwinklicht, der drey spitze Winkel hat.

Beym rechtwinklichten Triangel nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel entgegen gesetzt ist, die Hypothenuse; und die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die Katheten, oder Perpendikel.

§. 11.

Ein Cirkel ist eine ebene Figur, welche von einer Linie, die von einem gewissen Punkte innerhalb der Figur allenthalben gleichweit abstehet, begrenzt wird. Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt, oder das Centrum; die Begrenzungslinie der Umkreis, oder die Peripherie; jede gerade Linie vom Mittelpunkte bis zum Umkreise der Halbmesser, oder der Radius; jede gerade Linie von einem Punkte des Umkreises bis zu einem andern, wenn sie durch den Mittelpunkt gehet, der Durchmesser, oder Diameter; wenn sie nicht durch den Mittelpunkt gehet, eine Sehne, oder Chorde; jedes Stück des Umkreises ein Bogen.

Zusatz. 1. Alle Halbmesser in einem Cirkel sind einander gleich.

2. Jeder Punkt, dessen Abstand vom Centro entweder größer, oder kleiner, als der Halbmesser ist, liegt im ersten Falle außerhalb, im zweyten innerhalb der Cirkelfläche.

3. Der Durchmesser ist der doppelte Halbmesser; daher sind auch alle Durchmesser in einem Cirkel einander gleich.

4. Der Durchmesser halbirt die Fläche sowohl, als den Umkreis des Cirkels.

5. Aus jedem Punkte läßt sich mit jedem Halbmesser ein Cirkel beschreiben.

6. Haben zwey Cirkel gleiche Halbmesser, oder Durchmesser: so sind ihre Flächen sowohl als ihre Umkreise einander gleich.

§. 12.

Aufgabe: Auf jeder geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben. Fig. 1.

Aus dem Endpunkte A beschreibe man mit dem Halbmesser AB einen Cirkel, desgleichen auch aus B mit BA. Vom Durchschnitte C ziehe man CA, CB: so ist △CAB gleichseitig.

Denn es ist §. 11. Zus. 1. CA = AB, und AB = BC, folglich I. §. 45. auch CA = BC.

§. 13.

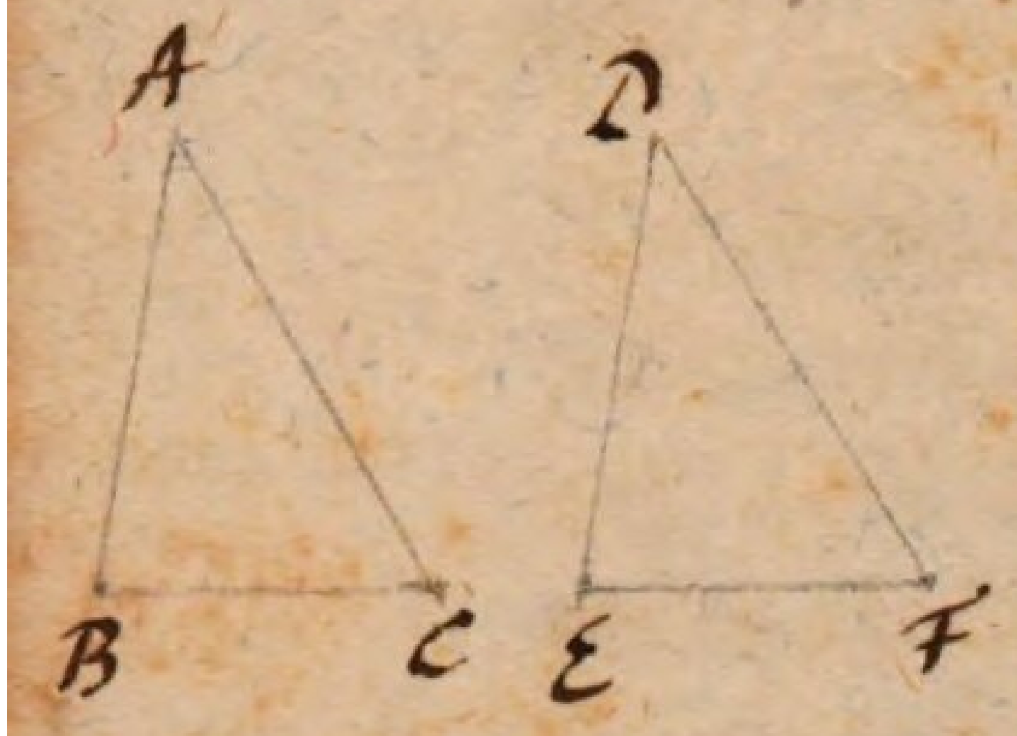
Aufgabe: Jede gerade Linie AB an irgend einen Punkt C zu legen; auch zu irgend einer geraden Linie CD hinzuzusetzen, oder von irgend einer größern CD abzuschneiden. Fig. 2.

Aus C beschreibe man mit einem der AB gleichen Halbmesser einen Cirkel: so lehrt der Augenschein, wie man die Linie als CE = AB an C legen könne; auch so, daß sie, als CF = AB zu der andern CD hinzugesetzt, oder, als CG = AB von der größern CD abgeschnitten werde.

II. Lehre von den Triangeln.

§. 14.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten AC, CB, und der davon eingeschlossene Winkel


A
B
C
D
E
F

kel ACB des einen Triangels, zweyen Seiten DF, FE, und dem davon eingeschlossenen Winkel DFE des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst und ihre gleichen Seiten oder Winkeln entgegengesetzte Winkel oder Seiten einander gleich. Fig. 3.

Man legt den einen △ABC auf den andern, daß C auf F liegt: so decken sich §. 7. die gleichen Winkel ACB, DFE; die gleichen Seiten CA, FD, und CB, FE; folglich auch AB, DE; folglich die ganzen Triangel, und es ist △ABC = △DEF; AB = DE; BAC = EDF; ABC = DEF.

§. 15.

Sind in einem Triangel ABC zwey Seiten BA, AC einander gleich: so sind die solchen Seiten entgegengesetzten Winkel ACB, ABC, auch einander gleich. Fig. 4.

Man verlängere AB, AC, mache §. 13. BD = CE, und ziehe BE, CD: so ist I. §. 46. AD = AE.

Da AB = AC; AE = AD; A = A: so ist §. 14. △ABE = △ACD; BE = CD; ABE = ACD; AEB = ADC.

Da CE = BD; BE = CD; AEB = ADC: so ist §. 14 △EBC = △DBC und CBE = BCD. Nun war ABE = ACD. Folglich ist I. §. 46. ABC = ACB.

§. 16.

Sind in einem Triangel ABC, zwey Winkel ACB, ABC, einander gleich: so sind die solchen Winkeln entgegengesetzten Seiten AB, AC, auch einander gleich. Fig. 5.

Denn wären AB, AC, ungleich und etwa AB größer: so sey §. 13. BD = AC. Nun ist BC = BC, und ABC = ACB. Folglich wäre §. 14. △DBC = △ACB, welches I. §. 44. unmöglich.

§. 17.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, die drey Seiten AB, BC, CA, des einen, den drey Seiten DE, EF, FD, des andern, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst, und die gleichen Seiten entgegengesetzten Winkel, einander gleich. Fig. 3. 6.

Man lege Fig. 3. den einen △ABC auf den andern, daß, weil BC = EF, §. 7. C auf F, und B auf E liegt: so muß A auf D fallen, folglich §. 7. BA die ED, und CA die FD, und daher △ABC den △DEF, folglich die gleichen Seiten entgegengesetzten Winkel einander, decken.

Denn fiel A nicht auf D, sondern irgendwo außer D, wie Fig. 6: so ziehe man AD. Nun ist angenommen BA = ED, folglich §. 15. BAD = BDA, folglich CAD < BDA, und noch vielmehr CAD < CDA. Nun ist auch angenommen CA = FD, folglich §. 15. CAD = CDA, welches dem Vorigen offenbar wiederspricht.

§. 18.

Aufgabe: Jeden geradlinichten Winkel BAC zu halbiren. Fig. 7.

Man mache §. 13. AD = AE, ziehe DE, beschreibe §. 12. den gleichseitigen △DEF, und ziehe AF: so halbirt solche den Winkel BAC.

Denn

Denn da DA = AE, DF = FE, FA = FA: so ist §. 17. △ADF = △AEF, und DAF = FAE.

§. 19.

Aufgabe: Jede gerade Linie AB zu halbiren. Fig. 8.

Man beschreibe §. 12. den gleichseitigen △ABC, halbire §. 18. den Winkel ACB mittelst CD: so halbirt solche die gerade Linie AB.

Denn da AC = CB, CD = CD, ACD = DCB: so ist §. 14. △CAD = △CBD, und AD = DB.

§. 20.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, in einem Punkte C, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 9.

Man mache §. 13. CD = CE, beschreibe §. 12. den gleichseitigen △DEF, und ziehe FC: so ist diese auf AB in C senkrecht.

Denn da CD = CE, DF = FE, FC = FC: so ist §. 17. △FDC = △FEC, und FCD = FCE.

§. 21.

Aufgabe: Auf eine gerade Linie AB, von einem Punkte C, einen Perpendikel zu fällen. Fig. 10.

An der andern Seite der Linie AB nehme man willkührlich einen Punkt, D, und beschreibe aus C mit CD einen Cirkel, welcher die AB in E und F schneidet. Man halbire §. 19. EF in G, und ziehe CG: so ist solche auf AB senkrecht.

Denn da EG = GF, EC = CF, CG = CG: so ist §. 17. △CEG = △CFG, und CGE = CGF.

§. 22.

Jede Nebenwinkel ACD, DCB, sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 11.

Sind ACD, DCB, einander gleich: so sind sie selbst §. 8. zwey rechte Winkel. Sind sie ungleich: so errichte man §. 20. den Perpendikel CE, daß also ACE + ECB = 2 R.

Nun ist ECB = ECD + DCB, folglich I. §. 46. ECB + ACE = ECD + DCB + ACE. Eben so ist ACD = ACE + ECD, folglich I. §. 46. ACD + DCB = ACE + ECD + DCB. Demnach ist I. §. 45. ACD + DCB = ECB + ACE = 2 R.

Zusatz. 1. Ist ein Winkel BCD gegeben, und man verlängert einen seiner Schenkel BC: so erhält man §. 5. seinen Nebenwinkel DCA, welcher seine Ergänzung, oder sein Complement zu zwey rechten Winkeln genannt wird.

2. Sind zwey Winkel einander gleich: so sind auch ihre Complemente einander gleich; und umgekehrt.

§. 23.

Zwey Winkel BCD, DCA, welche zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind, und einen gemeinschaftlichen Scheitel C und Schenkel CD haben, sind Nebenwinkel. Fig. 11.

Gesetzt ACB wäre keine gerade Linie (§. 5.), so sey es irgend eine andre, etwa ACF, so daß also §. 22. DCA + DCF = 2 R. Nun ist angenommen BCD + DCA = 2 R. Folglich wäre I. §. 45. DCA + DCF = BCD + DCA, folglich I. §. 46. DCF = BCD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 24.

§. 24.

Alle rechte Winkel sind einander gleich. Fig. 11.

Gesetzt zwey rechte Winkel wären ungleich, wie ECB, ECF: so verlängere man BC nach A. Nun ist angenommen, daß ECB ein rechter Winkel. Folglich ist §. 22. auch ACE ein rechter Winkel. Nun ist auch angenommen, daß ECF ein rechter Winkel. Folglich wären §. 23. ACE, ECF, Nebenwinkel, das ist, §. 5. ACF eine gerade Linie. Nun ist auch ACB eine gerade Linie, und beyde schnitten einander in AC, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 25.

Jede Scheitelwinkel AEC, DEB, sind einander gleich. Fig. 12.

Da §. 22. AEC + AED = 2 R, und AED + DEB = 2 R. so ist I. §. 45. AEC + AED = AED + DEB, folglich I. §. 46. AEC = DEB.

Eben so beweist man auch, daß AED = CEB.

Zusatz. Die Winkel um einen gemeinschaftlichen Punkt E, sind zusammen vier rechten Winkeln gleich.

§. 26.

Zwey Winkel, AEC, DEB, welche einander gleich sind, und einen gemeinschaftlichen Scheitel E haben, indeß daß zwey einander entgegengesetzte Schenkel, AE, EB, in einer geraden Linie liegen, sind Scheitelwinkel. Fig. 12.

Gesetzt CED wäre keine gerade Linie (§. 5.) so sey es irgend eine andre, etwa CEF, so daß also §. 25. AEC = BEF. Nun ist angenommen AEC = DEB. Folglich wäre I. §. 45. BEF = DEB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 27.

In jedem Triangel ABC, dessen Seite BC verlängert worden, ist der äußere Winkel ACD größer, als jeder der beyden innern ihm entgegengesetzten, BAC, ABC. Fig. 13.

Man halbire §. 19. AC in E, ziehe BE, verlängere sie, mache §. 13. EF = BE, und ziehe FC.

Da AE = EC, BE = EF, und §. 25. AEB = FEC: so ist §. 14. BAE = ECF, folglich I. §. 44. ACD > BAE.

Auf eben die Art, wenn man BC halbirt, beweist man auch, daß ACD > ABC.

§. 28.

In jedem Triangel ABC sind jede zwey Winkel ABC, ACB, zusammen kleiner als zwey rechte Winkel. Fig. 13.

Verlängert man BC, so ist §. 27. ABC < ACD, und §. 22. ACB + ACD = 2 R. Folglich ist I. §. 48. ABC + ACB + ACD < ACD + 2 R. folglich ist I. §. 48. ABC + ACB < 2 R.

Zusatz. Auf eine gerade Linie AB, fällt von einem Punkte C nur ein Perpendikel CG. Fig. 10.

Denn fiel noch ein anderer Perpendikel CF: so wäre CGF + CFG = 2 R. gegen das eben bewiesene.

§. 29.

In jedem Triangel ABC, ist einer größern Seite AC, auch ein größerer Winkel ABC; und einem größern Winkel ABC, auch eine größere Seite AC entgegengesetzt. Fig. 14.

Ist

Ist erstlich AC > AB, so mache man §. 13. AD = AB. Folglich ist §. 15. ABD = ADB, folglich ABC > ADB. Nun ist §. 27. ADB > ACB. Folglich ist noch vielmehr ABC > ACB.

Ist zweytens ABC > ACB, so ist weder AC < AB, weil sonst ABC < ACB seyn müßte; noch AC = AB, weil sonst §. 15. ABC = ACB wäre. Folglich ist nothwendig AC > AB.

§. 30.

Unter allen Linien, die von einem Punkte C nach einer geraden Linie AB gezogen werden, ist der Perpendikel CG die kleinste, und jede dem Perpendikel nähere CF, kleiner als die entferntere CB. Fig. 10.

Da CGF ein rechter Winkel: so ist §. 28. CBG sowohl, als CFG, kleiner als ein rechter Winkel; folglich §. 22. CFB ein stumpfer Winkel. Demnach ist §. 29. CG < CF, und CF < CB.

Zusatz. Fällt von einem Punkte C auf eine gerade Linie AB ein Perpendikel CG; so heißt solcher die Entfernung, oder der Abstand des Punkts C von solcher Linie AB.

§. 31.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, und der der größern Seite BA entgegengesetzte Winkel ACB, des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DF, und dem der größern Seite ED entgegengesetzten Winkel DFE des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst, und ihre gleichen Seiten oder Winkeln entgegengesetzte Winkel oder Seiten einander gleich. Fig. 3.

Man lege den einen △ABC auf den andern, daß C auf F liegt: so decken sich §. 7. die gleichen Winkel ACB, DFE, und die gleichen Seiten CA, FD, so daß A auf D und CB auf FE fällt. Nun kann B nicht dis-seits E etwa in G fallen, weil sonst §. 7. CB = FG wäre, CA = FD, und BCA = GFD, folglich §. 14. △ABC = △DGF und AB = DG, folglich, weil AB = DE, auch DG = DE, welches §. 30. unmöglich ist. Eben so beweist man, daß B auch nicht jenseits E fallen kann. Folglich muß nothwendig B auf E fallen. Folglich ist §. 7. CB = FE. Nun ist auch CA = FD, BCA = EFD, folglich ist §. 14. △ABC = △DEF, BAC = EDF, ABC = DEF.

§. 32.

In jedem Triangel ABC, sind jede zwey Seiten BA, AC, zusammen größer als die dritte BC. Fig. 15.

Man verlängere BA, mache AD = AC, und ziehe DC: so ist §. 15. ACD = ADC, folglich BCD > ADC, folglich §. 29. BD > BC. Nun ist BD = BA + AD = BA + AC. Folglich ist BA + AC > BC.

Eben so beweist man auch, daß AC + CB > AB, und AB + BC > AC.

§. 33.

Ist auf der Grundlinie BC eines Triangels ABC ein andrer Triangel DBC, dessen Spitze D innerhalb des ersten fällt, beschrieben: so sind die innern Schenkel, BD, DC, zwar zusammen kleiner als die äußern Schenkel BA, AC, schließen aber einen größern Winkel BDC ein. Fig. 16.

Man

Man verlängere BD bis E: so ist §. 32. BA + AE > BE, folglich I. §. 48. BA + AC > BE + EC. Nun ist eben so §. 32. DE + EC > DC, folglich I. §. 48. BE + EC > BD + DC. Folglich ist noch vielmehr BA + AC > BD + DC.

Da §. 27. BDC > BEC, und BEC > BAC: so ist noch vielmehr BDC > BAC.

§. 34.

Aufgabe: Aus drey geraden Linien AC, CD, DE, von denen jede zwey zusammen größer als die dritte sind, einen Triangel zu machen. Fig. 17.

Auf eine gerade Linie AB trage man die gegebenen eine nach der andern auf, und beschreibe einen Cirkel aus C mit CA, und noch einen aus D mit DE. Vom Durchschnittpuukt F ziehe man nach D und C gerade Linien: so ist im △FDC §. 11. Zus. 1. FC = CA, CD = CD, FD = DE.

§. 35.

Aufgabe: An eine gerade Linie AB in einem bestimmten Punkte A einen gegebenen Winkel DCE zu legen. Fig. 18.

In den Schenkeln des gegebenen Winkels nehme man willkürlich die Punkte D, E, ziehe DE, und mache §. 34. aus den drey Linien CE, ED, DC, den Triangel AGF, so daß AG = CE, GF = ED, FA = DC: so ist §. 17. △AGF = △CED, und FAG = DCE.

§. 36.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, aber nicht der davon eingeschlossene Winkel BAC des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DF, und dem davon eingeschlossenen Winkel

EDF

EDF des andern Triangels, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so ist dem größern Winkel BAC, auch eine größere Seite BC entgegengesetzt. Fig. 19.

Da BAC > EDF, so mache man §. 35. EDH = BAC und §. 13. DH = DF = AC. Ziehe EH und FH.

Da AB = DE, AC = DH, BAC = EDH: so ist §. 14. △ABC = △DEH und BC = EH.

Da DH = DF: so ist §. 15. DFH = DHF, folglich EFH > DHF und noch vielmehr EFH > EHF. Folglich ist §. 29. EH > EF. Nun ist bewiesen BC = EH. Folglich ist auch BC > EF.

§. 37.

Sind in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten BA, AC, aber nicht die dritte Seite BC des einen Triangels, zweyen Seiten ED, DF, und der dritten Seite EF des andern Triangels, in der Ordnung, wie sie hier genannt worden, gleich: so ist der größern Seite BC auch ein größerer Winkel BAC entgegengesetzt. Fig. 19.

Da BC > EF, so ist weder BAC < EDF, weil sonst §. 36. BC < EF seyn müßte, noch BAC = EDF, weil sonst §. 14. BC = EF wäre. Folglich ist nothwendig BAC > EDF.

§. 37. *

Sind in drey Triangeln GAF, BAC, EDF, von den Winkeln, welche den Grundlinien GF, BC, EF, entgegengesetzt sind, jede zwey zusammen größer als der dritte, und die Schenkel alle einander gleich: so kann aus den Grundlinien GF, BC, EF, ein Triangel gemacht werden. Fig. 19.

Sind

Sind die den Grundlinien entgegengesetzten Winkel einander gleich: so sind §. 14. auch die Grundlinien einander gleich, folglich offenbar jede zwey davon größer als die dritte. Folglich kann §. 34. aus diesen Grundlinien ein Triangel gemacht werden.

Sind gedachte Winkel aber ungleich: so nehme man zwey davon, welche man will, etwa BAC, EDF. Nun sey §. 35. FDH = BAC, und DH = DF = AC. Ziehet man nun HF, HE: so ist §. 14. FH = BC. Nun ist angenommen EDF + BAC > GAF, aber BAC = FDH. Folglich ist EDF + FDH > GAF, das ist, EDH > GAF, folglich §. 36. EH > GF. Nun ist §. 32. EF + FH > EH. Folglich ist noch vielmehr EF + FH > GF. Nun war FH = BC. Folglich ist EF + BC > GF. Da nun eben so erweislich, daß EF + GF > BC, und BC + GF > EF: so sind von diesen Grundlinien GF, BC, EF, jede zwey zusammen größer als die dritte, und kann daher §. 34. ein Triangel aus ihnen gemacht werden.

§. 38.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Winkel ABC, ACB, und die anliegende Seite BC, oder eine entgegengesetzte Seite AB, des einen Triangels, zweyen Winkeln DEF, DFE, und der anliegenden Seite EF, oder der dem gleichen Winkel entgegengesetzten Seite DE, des andern Triangels, in der Ordnung wie sie hier genannt worden, gleich: so sind die Triangel selbst und ihre gleichen Winkeln oder Seiten, entgegengesetzte Seiten oder Winkel einander gleich. Fig. 20.

Es sey zuerst BC = EF: so sind nothwendig BA, ED einander gleich, folglich §. 14. △ABC = △DEF.

Denn

Denn wären BA, ED, ungleich, also die eine, etwa BA, größer: so sey §. 13. BG = ED. Ziehet man nun GC: so wäre §. 14. GCB = DFE. Nun ist angenommen ACB = DFE. Folglich wäre I. §. 45. ACB = GCB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Es sey zweytens AB = DE: so sind nothwendig BC, EF, einander gleich, folglich §. 14. △ABC = △DEF.

Denn wären BC, EF ungleich, also die eine, etwa BC, größer: so sey §. 13. BH = EF. Ziehet man nun AH: so wäre §. 14. AHB = DFE. Nun ist angenommen ACB = DFE. Folglich wäre I. §. 45. ACB = AHB, welches §. 27. unmöglich ist.

III. Lehre von den Parallellinien.

§. 39.

Zwey gerade Linien, die an der einen oder der andern Seite irgend einmal zusammenlaufen, heißen convergent; die aber an keiner Seite zusammenlaufen, so weit man sie auch verlängern mag, heißen parallel. Werden zwey gerade Linien, sie mögen parallel oder convergent seyn, von einer dritten geschnitten: so liegen von den innern Winkeln, welche diese mit jenen macht, zwey disseits, und zwey jenseits der schneidenden Linie. Von den innern Winkeln nennt man diejenigen Wechselwinkel, wovon ein disseitiger einem jenseitigen entgegengesetzt ist.

§. 40.

Werden zwey gerade Linien BA, AC, welche convergent sind, von einer dritten, FG, geschnitten: so sind die innern Winkel DEA, EDA, an der Seite, wo die beyden Linien zusammenlaufen, zusammen kleiner

kleiner als zwey rechte Winkel; die innern jenseitigen CED, BDE, aber zusammen größer als zwey rechte Winkel. Fig. 21.

Da die beyden Linien BA, CA, wenn man sie gehörig verlängert, in irgend einem Punkte A' zusammenlaufen: so entsteht ein Triangel ADE. Folglich ist §. 28. DEA + EDA < 2 R.

Da §. 27. BDE > DEA: so ist I. §. 48. BDE + CED > DEA + CED. Nun ist §. 22. DEA + CED = 2 R. Folglich ist BDE + CED > 2 R.

§. 41.

Werden zwey gerade Linien AB, CD, von einer dritten EF geschnitten; und es sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, DHG, zusammen zwey rechten Winkeln gleich; oder es ist der äußere Winkel EGB dem ihm an einerley Seite entgegengesetzten innern Winkel EHD, gleich; oder es sind die Wechselswinkel AGH, GHD einander gleich: so sind gedachte Linien, AB, CD, parallel. Fig. 22.

Ist BGH + GHD = 2 R.: so können AB, CD, an keiner Seite zusammenlaufen, weil sonst §. 40. BGH + GHD entweder <, oder > 2 R. seyn müßten. Folglich sind §. 39. AB, CD, parallel.

Ist EGB = EHD: so ist I. §. 46. EGB + BGH = EHD + BGH. Nun ist §. 22. EGB + BGH = 2 R. Folglich ist I. §. 45. EHD + BGH = 2 R. Folglich sind nach Obigen AB, CD, parallel.

Ist AGH = GHD, und §. 25. AGH = EGB: so ist I. §. 45. EGB = GHD. Folglich sind nach Obigen AB, CD, parallel.

§. 42.

Aufgabe: Eine gerade Linie soll durch einen Punkt G einer andern CD parallel gezogen werden. Fig. 22.

In CD nehme man willkührlich einen Punkt H, ziehe HG, mache §. 35. AGH = GHD, und verlängere AG nach B; so ist §. 41. AB der CD parallel.

§. 43.

Werden zwey gerade Linien, AB, CD, von einer dritten EF geschnitten, und es sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel BGH, GHD, zusammen kleiner als zwey rechte Winkel: so sind gedachte Linien AB, CD, convergent, und laufen genugsam verlängert an derselben Seite zusammen. Fig. 23.

Da BGH + GHD < 2 R. und §. 22. EGB + BGH = 2 R. so ist EGB + BGH > BGH + GHD, folglich I. §. 46. EGB > GHD. Macht man nun §. 35. EGK = GHD, und verlängert KG nach L: so ist §. 42. LK der CD parallel. Nun gehet CD durch einen Punkt H innerhalb der Oefnung des Winkels LGB, und schneidet daher §. 4. Zus. wenigstens einen seiner Schenkel, LG, GB. Sie schneidet aber nicht den Schenkel LG, dem sie parallel ist. Folglich schneidet sie den andern Schenkel GB. Demnach sind AB, CD, convergent, und laufen an der Seite zusammen, wo die Winkel zusammen kleiner als zwey rechte Winkel sind.

§. 44.

Werden zwey gerade Linien, AB, CD, welche parallel sind, von einer dritten EF, geschnitten: so sind die innern an einerley Seite liegenden Winkel, BGH, DHG, zusammen zwey rechten Winkeln gleich; auch ist der äußere Winkel EGB dem ihm an einerley

Seite

Seite entgegengesetzten innern Winkel DHG gleich; desgleichen sind auch die Wechselswinkel AGH, DHG, einander gleich. Fig. 22.

Sind AB, CD, parallel: so ist BGH + DHG weder < 2 R, noch > 2 R. weil sonst §. 43. AB, CD, an der einen oder an der andern Seite zusammenlaufen müßten. Folglich ist nothwendig BGH + DHG = 2 R.

Sind AB, CD, parallel: so ist nach Obigen BGH + DHG = 2 R. Nun ist auch §. 22. BGH + EGB = 2 R. Folglich ist I. §. 45. BGH + EGB = BGH + DHG, folglich I. §. 46. EGB = DHG.

Sind AB, CD, parallel: so ist nach Obigen EGB = DHG. Nun ist §. 25. EGB = AGH. Folglich ist I. §. 46. AGH = DHG.

§. 45.

Sind zwey gerade Linien, AB, CD, einer dritten EF, parallel: so sind sie selbst parallel. Fig. 24.

Es schneide eine gerade Linie GK gedachte drey Linien. Da AB der EF parallel: so ist §. 44. AGK = GKF; und da CD der EF parallel: so ist §. 44. GHD = GKF. Folglich ist I. §. 45. AGH = GHD. Folglich sind §. 41. AB, CD, parallel.

§. 46.

In jedem Triangel, ABC, dessen Seite BC, verlängert worden, ist der äußere Winkel ACD den beyden innern ihm entgegengesetzten Winkeln ABC, CBA, zusammen gleich; auch sind die drey innern Winkel zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 25.

Da §. 27. ACD > ABC, so mache man §. 35. DCE = ABC. Folglich sind §. 41. AB, CE, parallel,

folglich §. 44. BAC = ACE. Nun war ABC = DCE. Folglich ist I. §. 46. ABC + BAC = DCE + ACE = ACD.

Da nach Obigen ABC + BAC = ACD: so ist I. §. 46. ABC + BAC + ACB = ACD + ACB. Nun ist §. 22. ACD + ACB = 2 R. Folglich ist I. §. 45. ABC + BAC + ACB = 2 R.

§. 47.

Eine vierseitige Figur, worinn jede Seite der ihr entgegengesetzten parallel ist, heißt ein Parallelogramm; jede andere vierseitige Figur aber ein Trapez. Ein Rectangel ist ein rechtwinklichtes Parallelogramm; und heißt ein Quadrat, wenn alle vier Seiten gleich sind, ein Oblongum aber, wenn nur die entgegengesetzten Seiten gleich sind. Ist das Parallelogramm schiefwinklicht: so heißt es ein Rhombus, wenn alle vier Seiten gleich sind; ein Rhomboid aber, wenn nur die entgegengesetzten Seiten gleich sind.

Zusatz. In jeder geradlinichten Figur sind §. 46. die Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich; weil sie von der Diagonale in zwey Triangel getheilt wird.

§. 48.

Sind in einer vierseitigen Figur ABCD, zwey Seiten, AB, CD, gleich und parallel: so sind die beyden andern Seiten, BC, DA, auch gleich und parallel. Fig. 26.

Man ziehe die Diagonale BD. Da AB, CD, parallel: so ist §. 44. ABD = BDC. Nun ist AB = CD; BD = BD. Folglich ist §. 14. AD = BC, und BDA = CBD. Folglich §. 41. AD, BC, auch parallel.

§. 49.

In jedem Parallelogramm ABCD, sind die entgegengesetzten Seiten und Winkel einander gleich, Fig. 26.

Man ziehe die Diagonale BD. Da AB, CD, parallel: so ist §. 44. ABD = BDC. Eben so, da BC, AD parallel, ist §. 44. ADB = CBD. Nun ist BD = BD. Folglich ist §. 38. △ABD = △CBD, AB = CD, AD = BC, und BAD = BCD. Auch ist I. §. 46. ABC = ADC.

Zusatz. 1. Jedes Parallelogramm wird von der Diagonale halbirt, weil △ABD = △CBD.

2. Alle Perpendikel, AD, BC, zwischen zwey Parallellinien AB, CD, sind einander gleich; weil ADC + BCD = 2 R, folglich §. 41. auch AD, BC, parallel, folglich §. 47. ABCD ein Parallelogramm.

3. Zwey Parallelogramme decken sich und sind einander gleich, wenn zwey Seiten und der davon eingeschlossene Winkel des einen, zweyen Seiten und dem davon eingeschlossenen Winkel des andern gleich sind.

4. Daher sind zwey Quadrate einander gleich, wenn die Seite des einen der Seite des andern gleich ist.

§. 50.

Jedes Parallelogramm ABCD wird von einer geraden Linie FG, welche man durch die Mitte der Diagonale E willkürlich legt, halbiret. Fig. 26.

Da AB, CD, parallel, so ist §. 44. BFE = EGD. Nun ist auch §. 25. BEF = GED. Auch ist BE = ED. Folglich ist §. 38. △EBF = △EGD.

Nun ist §. 49. Zus. 1. $\triangle ABD = \triangle CBD$. Folglich ist I. §. 46. ADEF = BCGE. Nun war $\triangle EGD = \triangle EBF$. Folglich ist I. §. 46. ADGF = BCGF.

§. 51.

Aufgabe: Ein Parallelogramm zu beschreiben, wozu zwey Seiten, BC, CD, und der davon eingeschlossene Winkel BCD, gegeben sind. Fig. 26.

Man ziehe §. 42. der CD durch B die BA, und der BC durch D die DA parallel: so ist §. 47. das Parallelogramm ABCD vollendet.

Zusatz. Zu einem Rhombus braucht außer dem Winkel nur eine Seite; zu einem Oblongum brauchen nur zwey Seiten; zu einem Quadrate braucht nur eine Seite gegeben zu seyn, und man nennt die Figur das Quadrat der gegebenen Seite, oder das Rectangel der beyden gegebenen Seiten.

IV. Verwandlung geradlinichter Figuren.

§. 52.

Die Höhe einer geradlinichten Figur ist der von ihrer Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel. Ist durch die Spitze der Figur eine gerade Linie der Grundlinie parallel gezogen: so ist §. 49. Zus. 2. jeder Perpendikel zwischen diesen Parallellinien mit der Höhe der Figur einerley; und man sagt die Figur sey in diesen Parallelen, worinn sich die entgegengesetzten Grenzen der Figur enden. Daher haben alle Figuren in zwey Parallellinien einerley Höhe.

§. 53.

Parallelogramme AE, AD, auf ein und derselben Grundlinie AB, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 27.

Da §. 49. AB = CE = FD: so ist I. §. 46. CF = ED. Nun ist auch §. 49. CA = EB, und AF = BD. Folglich ist §. 17. △CAF = △EBD, folglich I. §. 46. CAGE = FGBD, folglich I. §. 46. AE = AD.

§. 54.

Parallelogramme AC, EG, auf gleichen Grundlinien BC, FG, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 28.

Ziehet man BE, CH: so ist §. 53. AC = BH, und EG = BH; folglich I. §. 45. AC = EG.

§. 55.

Triangel ABC, DBC, auf ein und derselben Grundlinie BC und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 29.

Vollendet man §. 51. die Parallelogramme EC, BF: so ist §. 53. EC = BF. Nun ist §. 49. Zus. 1. △ABC = $\frac{1}{2}$EC, und △DBC = $\frac{1}{2}$BF. Folglich ist I. §. 47. △ABC = △DBC.

§. 56.

Triangel ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien, BC, EF, und in gleicher Höhe, sind einander gleich. Fig. 30.

Vollendet man §. 51. die Parallelogramme CG, EH; so ist §. 54. CG = EH. Nun ist §. 49. Zus. 1. △ABC = $\frac{1}{2}$CG, und △DEF = $\frac{1}{2}$EH. Folglich ist I. §. 47. △ABC = △DEF.

§. 57.

Gleiche Triangel ABC, DBC, auf ein und derselben Grundlinie BC, sind in gleicher Höhe. Fig. 31.

Man ziehe AD. Gesetzt nun AD wäre der BC nicht parallel (§. 52.) so sey es eine andre, etwa AE. Demnach wäre §. 55. △ABC = △EBC. Nun ist angenommen △ABC = △DBC. Folglich wäre I. §. 45. △EBC = △DBC, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 58.

Gleiche Triangel ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien BC, EF, sind in gleicher Höhe. Fig. 32.

Man ziehe AD. Gesetzt nun AD wäre der BF nicht parallel (§. 52.) so sey es eine andre, etwa AG. Demnach wäre §. 56. △ABC = △GEF. Nun ist angenommen, △ABC = △DEF. Folglich wäre I. §. 45. △GEF = △DEF, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 59.

Ein Parallelogramm ABCD, ist doppelt so groß als ein Triangel EBC, wenn beyde auf ein und derselben Grundlinie BC, und in gleicher Höhe sind. Fig. 33.

Ziehet man die Diagonale AC: so ist §. 55. △ABC = △EBC, folglich I. §. 47. 2△ABC = 2△EBC. Nun ist §. 49. ABCD = 2△ABC. Folglich ist I. §. 45. ABCD = 2△EBC.

§. 60.

Aufgabe: Jeden Triangel ABC in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel D gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 34.

Man

Man halbire §. 19. BC in E, ziehe AE, und mache §. 35. CEF = D. Man ziehe §. 42. der BC durch A die AG, und der EF durch C die CG parallel: so ist §. 59. EG = 2 △AEC. Nun ist §. 56. △ABE = △AEC, und daher △ABC = 2 △AEC. Folglich ist I. §. 45. EG = △ABC.

§. 61.

Jedes Parallelogramm ABCD, wird, wenn man durch einen willkürlichen Punkt der Diagonale, K, mit den einschließenden Seiten DA, AB, Parallelen EF, HG, legt, in vier Parallelogramme getheilt; so daß die beyden Parallelogramme durch welche die Diagonale nicht gehet, HF, EG, einander gleich sind. Fig. 35.

Da §. 49. Zus. 1. △ABC = △ADC, und △AEK = △AHK: so ist I. §. 46. EKCB = HKCD. Nun ist auch §. 49. Zus. 1 △KGC = △KFC. Folglich ist I. §. 46. EG = HF.

§. 62.

Jedes Quadrat ABCD, wird, wenn man durch einen willkürlichen Punkt der Diagonale K mit den einschließenden Seiten BA, AD, Parallelen GH, EF, legt, in vier Parallelogramme getheilt; so daß die beyden Parallelogramme, durch welche die Diagonale gehet, EH, GF, auch Quadrate sind. Fig. 36.

Da BA = AD: so ist §. 15. ABD = ADB. Nun ist §. 44. EKB = ADB. Folglich ist I. §. 45. ABD = EKB. Folglich ist §. 16. BE = EK, folglich §. 49. EH gleichseitig. Nun ist §. 44. BEK = BAD = R. Folglich ist §. 49. EH auch rechtwinklicht, folglich §. 47. ein Quadrat. Auf eben die Art beweist man, daß auch GF ein Quadrat sey.

§. 63.

Aufgabe: Jeden Triangel ABC in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel D und eine Seite E gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 37.

Man verwandle §. 60. den Triangel ABC in das Parallelogramm FH, worinn CFG = D sey. Man verlängere GH nach K, mache HK = E, ziehe KC, und verlängere sie bis sie §. 40. von der verlängerten GF in L geschnitten wird. Man ziehe §. 42. der GK durch L die LM, und der GL durch K die KM parallel, und verlängre HC nach O, und FC nach N: so ist §. 49, OM = HK = E, und §. 44. MOC = OLF = CFG = D, und §. 61. ON = FH = △ABC.

§. 64.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur ABCD, in ein Parallelogramm, wozu ein Winkel E gegeben ist, zu verwandeln. Fig. 38.

Man ziehe DB, und verwandle §. 60. △ABD in das Parallelogramm FH, worinn FKH = E sey. Ferner verwandle man §. 63. △BCD in das Parallelogramm HL, worinn GHM = FKH, und GH = FK sey: so ist FM das verlangte Parallelogramm.

Da GHM = FKH: so ist I. §. 46. GHM + GHK = FKH + GHK. Nun ist §. 44. FKH + GHK = 2 R. Folglich ist I. §. 45. GHM + GHK = 2 R. Folglich ist §. 23. KHM eine gerade Linie. Eben so beweist man auch, daß FGL eine gerade Linie ist. Nun ist FK und LM der GH gleich und parallel. Folglich ist §. 45. und I. §. 45. FK der LM gleich und parallel. Folglich ist §. 48. FL der KM gleich und parallel. Folglich ist §. 47. FM ein Parallelogramm, worinn FKM = E. Auch ist FM = FH + HL = △ABD + △BCD = ABCD.

Zusatz.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, wie man zwey Parallelogramme, mit einer gleichen Seite FK, GH, und einem gleichen Winkel FKH, GHM, so zusammensetzen, oder von einander wegnehmen könne, daß Summe und Differenz ein Parallelogramm sey.

§. 65.

In jedem rechtwinklichten Triangel, BAC, ist das Quadrat der Hypothenuse BE, den Quadraten der Katheten BG, AK, zusammen gleich. Fig. 39.

Man ziehe AE, BK und §. 42. der EC durch A die AL parallel. Auch ist §. 23. wegen der rechten Winkel bey A die BAH eine gerade Linie, und daher der CK parallel. Nun ist §. 24. BCE = ACK, folglich I. §. 46. ACE = BCK. Auch ist §. 47. AC = CK und CE = BC. Folglich ist §. 14. △ACE = △BCK. Nun ist §. 59. CL = 2 △ACE und AK = 2 △BCK. Folglich ist I. §. 47. CL = AK.

Auf eben die Art, wenn man AD, CF, ziehet, beweist man auch, daß LB = BG. Folglich ist I. §. 46. BE = CL + LB = AK + BG, das ist, $BC^q = AC^q + AB^q$.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, wie man zwey Quadrate so zusammensetzen könne, daß sie zusammen ein Quadrat ausmachen.

§. 66.

Ist in einem Triangel ABC, das Quadrat der einen Seite BC den Quadraten der beyden übrigen BA, AC, zusammen gleich: so schließen letztre einen rechten Winkel BAC ein. Fig. 40.

Man mache §. 35. CAD = R. und §. 13. AD = BA, ziehe DC: so ist §. 65. $CD^q = AC^q + AD^q$. Nun ist angenommen $BC^q = AC^q + BA^q = AC^q + AD^q$. Folg-

lich ist I. §. 45. $CD^q = BC^q$ folglich I. §. 50. CD = BC. Nun ist AD = BA, und AC = AC. Folglich ist §. 17. CAD = BAC. Nun war CAD = R. Folglich ist I. §. 45. BAC = R.

V. Lehre von dem Cirkel.

§. 67.

Cirkel heißen concentrisch, wenn sie mit verschiednen Halbmessern aus ein und demselben Mittelpunkte gezogen sind. Cirkel schneiden einander, wenn die Peripherie des einen zum Theil innerhalb, zum Theil außerhalb des andern liegt. Cirkel berühren einander, wenn sie zusammentreffen, ohne einander zu schneiden. Ein Cirkel berührt den andern inwendig oder auswendig, je nachdem er ganz innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Eine gerade Linie berührt den Cirkel, wenn sie ihn trift ohne ihn zu schneiden, und heißt alsdenn eine Tangente des Cirkels.

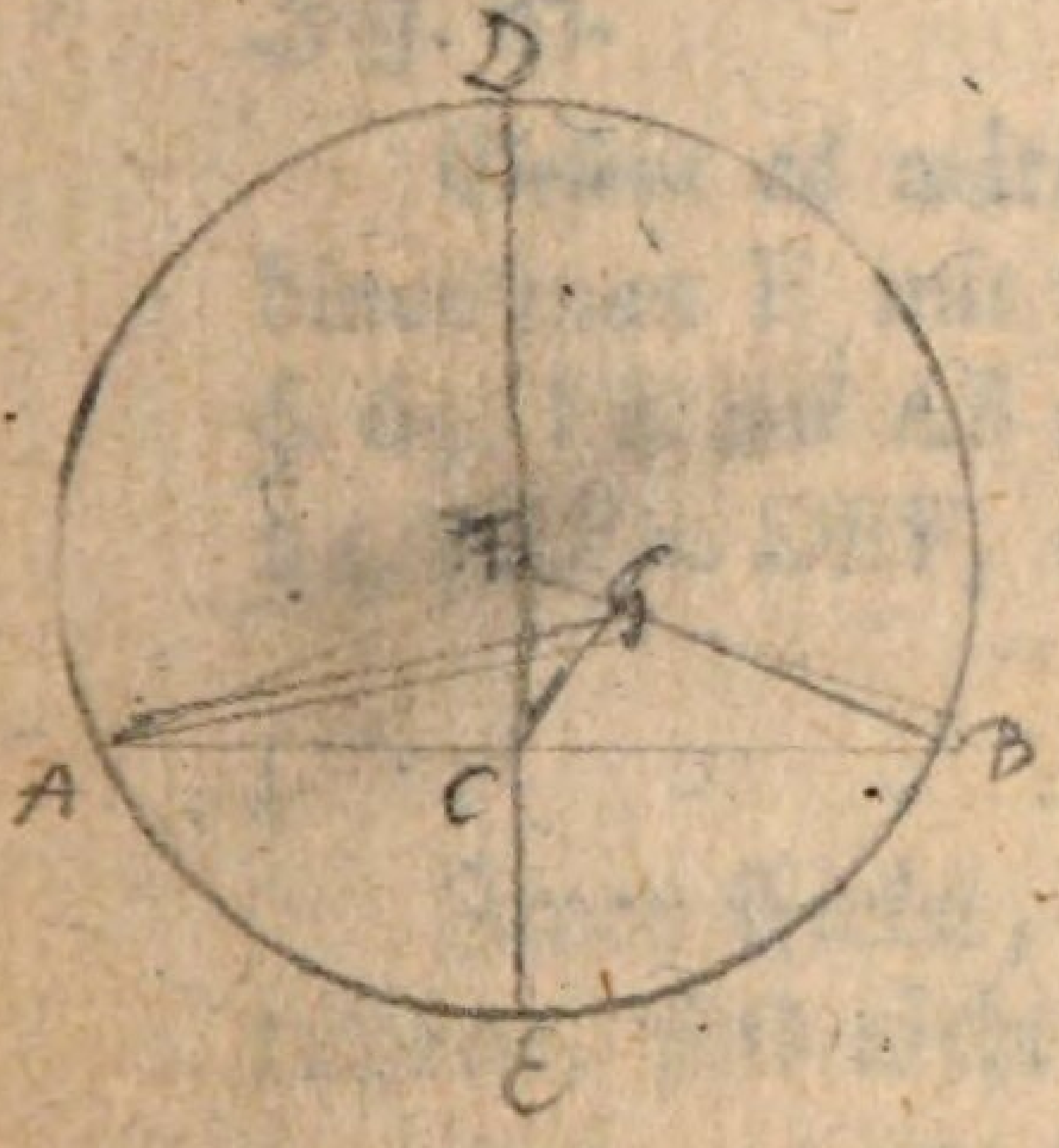
§. 68.

In einer geraden Linie DE, von welcher die Sehne eines Cirkels AB, in der Mitte C, senkrecht geschnitten wird, ist der Mittelpunkt. Fig. 41.

Gesetzt der Mittelpunkt wäre außerhalb DE, etwa in G, und man ziehet GA, GC, GB: so ist §. 11. Zus. 1. GA = GB. Nun ist AC = CB, GC = GC. Folglich wäre §. 17. GCA = GCB = R. Nun ist auch DCA = R. Folglich wäre §. 24. GCA = DCA, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Man findet demnach den Mittelpunkt eines Cirkels, wenn man §. 20. auf einer beliebigen Sehne AB in der Mitte C einen Perpendikel CD errichtet, solchen nach E verlängert und alsdenn in F halbirt.

§. 69.


D
A
C
B
E

§. 69.

Eine gerade Linie EDF durch den Mittelpunkt eines Cirkels D, schneidet die Sehne, AB, senkrecht, wenn sie selbige halbirt; und halbirt die Sehne AB, wenn sie selbige senkrecht schneidet. Fig. 24. 42

Ist C die Mitte der Sehne, und man ziehet DA, DB; so ist AC = CB, DA = DB, DC = DC; folglich §. 17. ACD = DCB, folglich §. 8. DC senkrecht.

Ist EF senkrecht: so ist §. 8. ACD = DCB. Nun ist DA = DB und daher §. 15. DAC = DBC. Folglich ist §. 38. AC = CB.

Zusatz. Ein gleichschenklichter Triangel DAB, wird von dem Perpendikel DC, der von der Spitze D auf die Grundlinie AB fällt, halbiret.

§. 70.

Zwey Sehnen eines Cirkels AB, CD, welche einander schneiden, können nicht beyde einander halbiren. Fig. 43.

Gesetzt es wäre DE = EC, und AE = EB; so verbinde man E mit dem Mittelpunkte F. Folglich wäre §. 69. FE auf AB und CD in E senkrecht, folglich §. 8. 24. AEF = DEF, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 71.

Zwey Cirkel, welche einander schneiden, oder berühren, sind nicht concentrisch. Fig. 49. 50. 51.

Gesetzt die Cirkel Fig. 49. die sich in A und B schneiden, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C (§. 67.) und man ziehet CA, und willkürlich CE: so ist §. 11. Zus. 1. CA = CD, und CA = CE, folglich I. §. 45. CD = CE, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Die

Die Cirkel Fig. 50. die einander auswendig in A berühren, können keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben; weil §. 67. jeder ganz außerhalb des andern liegt.

Gesetzt die Cirkel Fig. 51. die einander inwendig in A berühren, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt C, und man ziehet CA, und willkürlich CD: so ist §. 11. Zus. 1. CA = CB, und CA = CD, folglich I. §. 45. CB = CD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

§. 72.

Gehen von einem beliebigen Punkte innerhalb eines Cirkels, A, der nicht der Mittelpunkt ist, mehrere gerade Linien AB, AD, AE, AF, AG, bis an die Peripherie: so ist unter allen diesen die, welche den Mittelpunkt C trift, AB, die größeste, und die ihr nähere AD größer als die entferntere AE; die aber, welche verlängert den Mittelpunkt C trift, AG, die kleineste, und die ihr nähere AF, kleiner als die entferntere AE. Fig. 44.

Man ziehe CD, CE, CF. Da §. 32. AC + CD > AD, und §. 11. Zus. 1. CD = CB: so ist AB > AD. Da ferner §. 11. Zus. 1. DC = EC, auch CA = CA, und DCA > ECA: so ist §. 36. AD > AE. Ferner ist aus eben dem Grunde AE > AF. Endlich ist §. 32. CA + AF > CF, aber §. 11. Zus. 1. CF = CG = CA + AG; folglich CA + AF > CA + AG, folglich I. §. 48. AF > AG. Demnach ist AB > AD > AE > AF > AG.

Zusatz. Hieraus erhellet zugleich, daß zu beyden Seiten der größesten AB, oder kleinsten AG, nur je zwey gleiche gerade Linien vom gedachten Punkte A bis an die Peripherie gehen können.

Denn macht man §. 35. ACH = ACF, und ziehet AH: so ist auch CF = CH, CA = CA, folglich §. 14. AH = AF. Nun ist außer AH keine andre der AF gleich. Denn AL ist < AH und AK > AH.

§. 73.

Gehen von einem beliebigen Punkte außerhalb eines Cirkels A, mehrere gerade Linien bis an die Peripherie nach außen und nach innen: so ist unter denen nach innen, AB, AD, AE, AF, die welche den Mittelpunkt C trift, AB, die größeste, und die ihr nähere AD, größer als die entferntere AE; unter denen nach außen aber, AL, AK, AH, AG, die welche verlängert den Mittelpunkt C trift, AL, die kleinste, und die ihr nähere AK, kleiner als die entferntere AH. Fig. 45.

Man ziehe CD, CE, CF. Da §. 32. AC + CD > AD, und §. 11. Zus. 1. CD = CB: so ist AB > AD. Da ferner CD = CE, AC = AC, ACD > ACE: so ist §. 36. AD > AE. Aus gleichem Grunde ist auch AE > AF. Demnach ist AB > AD > AE > AF.

Man ziehe CG, CH, CK. Da §. 32. AL + LC < AK + KC, und §. 11. Zus. 1. LC = KC: so ist I. §. 48. AL < AK. Da ferner §. 33. AK + KC < AH + HC: so ist I. §. 48. AK < AH. Aus eben dem Grunde ist auch AH < AG. Demnach ist AL < AK < AH < AG.

Zusatz. Hieraus erhellet wie §. 72. daß zu beyden Seiten der größten oder der kleinsten nur je zwey gleiche gerade Linien von obgedachtem Punkte A bis an die Peripherie gehen können.

§. 74.

Ein Punkt innerhalb eines Cirkels, C, von welchem mehr als zwey gleiche gerade Linien, CA, CB,

CB, CD, bis an die Peripherie gehen, ist der Mittelpunkt. Fig. 46.

Gesetzt es wäre nicht C, sondern ein andrer, etwa F, der Mittelpunkt, und man ziehet CE, die man zu beyden Seiten verlängert: so wäre §. 72. CA < CB < CD, da doch CA = CB = CD seyn soll.

§. 75.

Zwey Cirkel schneiden einander nur in zwey Punkten. Fig. 52.

Gesetzt der Cirkel, dessen Mittelpunkt C, würde von irgend einem andern in drey Punkten A, B, D, geschnitten: so wäre §. 11. 74. C der Mittelpunkt des einen sowohl als des andern Cirkels, welches §. 71. unmöglich ist.

§. 76.

Berühren zwey Cirkel einander: so gehet die gerade Linie, welche die beyderseitigen Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt A. Fig 53. 54.

Zuerst berühre Fig. 54. ein Cirkel, dessen Mittelpunkt B, den andern von innen in A, und man ziehe AB, und verlängere sie bis G. Wäre nun des andern Cirkels Mittelpunkt nicht in AG; so sey er irgendwo ausser ihr etwa in C. Man ziehe CA, CB, und verlängre leztre zu beyden Seiten. Da §. 32. CB + BA > AC und §. 11. Zus. 1. AC = CD = CB + BD: so ist CB + BA > CB + BD, folglich I. §. 48. BA > BD. Nun ist §. 11. Zus. 1. BA = BF. Folglich wäre BF > BD, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zweytens berühre Fig. 53. ein Cirkel den andern von außen in A. Gesetzt nun irgend eine gerade Linie DE, die nicht durch den Berührungspunkt A gehet, verbände beyderseitige Mittelpunkte D, E, und man ziehet AD,

AD, AE: so wäre §. 11. Zus. 1. DA = DF, und AE = EG, folglich I. §. 46. DA + AE = DF + EG, folglich DA + AE < DE, welches §. 32. unmöglich ist.

§. 77.

Zwey Cirkel berühren einander nur in einem Punkte A. Fig. 50. 51.

Gesetzt Fig. 51. der Cirkel, dessen Mittelpunkt E, berührte den andern, dessen Mittelpunkt F, inwendig in A, und noch in einem andern Punkte: so müßte derselbe §. 76. von der verlängerten EF getroffen werden, wie G. Folglich wäre AE = EG, folglich AE > FG, und noch vielmehr AF > FG, welches §. 11. Zus. 1. unmöglich ist.

Gesetzt die Cirkel Fig. 50. deren Mittelpunkte B, C, berührten einander auswendig in A, und noch in einem andern Punkte D, der also außer der Linie BC, läge: so müßte §. 76. BC auch durch D gehen, und also D auch zugleich in der Linie BC liegen, welches unmöglich ist.

§. 78.

Sehnen eines Cirkels, AB, DE, liegen gleichweit vom Mittelpunkte C, wenn sie einander gleich sind; und sind einander gleich, wenn sie gleichweit vom Mittelpunkte liegen. Fig. 47.

Ist erstlich AB = DE, so sey §. 21. CF auf AB, und CG auf DE senkrecht, folglich §. 69. AB, DE, in F, G, halbirt, folglich I. §. 47. AF = EG, folglich I. §. 50. $AF^q = EG^q$. Da auch §. 11. Zus. 1. CA = CE, so ist $CA^q = CE^q$. Nun ist §. 65. $CA^q = AF^q + CF^q$ und $CE^q = EG^q + CG^q$. Folglich ist I. §. 45. $AF^q + CF^q = EG^q + CG^q$, folglich I. §. 46. $CF^q = CG^q$ folglich I. §. 50. CF = CG. §. 30. Zus.

Ist

Ist zweytens CF = CG §. 30. Zus. folglich I. §. 50. $CF^q = CG^q$, und wie zuvor $AF^q + CF^q = EG^q + CG^q$: so ist I. §. 46. $AF^q = EG^q$, folglich I. §. 50. AF = EG. Nun ist §. 69. AF = $\frac{1}{2}$AB und EG = $\frac{1}{2}$DE. Folglich ist I. §. 47. AB = DE.

§. 79.

In jedem Cirkel ist der Durchmesser AB die größte gerade Linie, und unter den übrigen die dem Mittelpunkte C nähere DE, größer als die entferntere FG. Fig. 48.

Es sey §. 21. CH auf DE, und CK auf FG senkrecht, folglich §. 30. Zus. CK > CH. Macht man CL = CH und §. 20. MLN auf CK senkrecht: so ist §. 78. MN = DE. Nun ist §. 11. Zus. 1. CM = CG, und CN = CF, aber MCN > GCF, folglich §. 36. MN > GF. Folglich ist auch DE > GF.

Da §. 32. MC + CN > MN, und §. 11. Zus. 1. MC = AC, CN = CB: so ist AC + CB > MN. Demnach ist AB > MN > GF.

§. 80.

Ein Perpendikel AD, auf eines Cirkels Durchmesser BA, in seinem Endpunkte A, fällt ganz außerhalb des Cirkels, und zwischen ihm und dem Cirkelbogen keine gerade Linie. Fig. 55.

Gesetzt es fiel ein Perpendikel AE, innerhalb des Cirkels, so daß also CAE ein rechter Winkel wäre. Ziehet man nun CE, so ist §. 11. Zus. 1. CE = CA, folglich §. 15. CEA = CAE = R, und daher CEA + CAE = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

Gesetzt es fiel zwischen dem Perpendikel AD, und dem Bogen AE, eine gerade AG: so sey §. 21. CH auf AG

AG senkrecht. Folglich wäre §. 28. AC > CH. Nun ist §. 11. Zus. 1. AC = CF. Folglich wäre CF > CH, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Ein auf dem Durchmesser im Endpunkte errichteter Perpendikel trift also den Cirkel ohne ihn zu schneiden, und ist daher §. 67. eine Berührungslinie oder Tangente, welche den Cirkel nur in einem Punkte berühren kann.

§. 81.

Aufgabe: Von einem Punkte außerhalb eines Cirkels A eine Tangente zu ziehen. Fig. 56.

Man ziehe AC, und errichte §. 20. auf solcher in B den Perpendikel BD. Aus C ziehe man mit CA einen Cirkel. Endlich ziehe man DC, AE: so ist leztre die verlangte Tangente.

Denn da §. 11. Zus. 1. AC = DC, und CE = CB, auch ACE = DCB: so ist §. 14. AEC = DBC = R. folglich §. 80. AE eine Tangente.

§. 82.

Auf der Tangente eines Cirkels AB, ist die gerade Linie CD, vom Mittelpunkte C, nach dem Berührungspunkte D, senkrecht. Fig. 57.

Gesezt, es wäre nicht CD, sondern irgend eine andre, etwa CE auf AB senkrecht, §. 21, so wäre §. 28. CD > CE. Nun ist CD = CF. Folglich wäre CF > CE, welches unmöglich ist.

§. 83.

Ist auf der Tangente eines Cirkels AB, im Berührungspunkte D, eine gerade Linie ED, senkrecht: so ist in solcher der Mittelpunkt des Cirkels. Fig 58.

Gesetzt der Mittelpunkt wäre nicht in ED, sondern irgendwo anders, etwa in F, und man ziehet FD: so ist solche §. 82. auf AB senkrecht. Nun ist angenommen, daß auch ED senkrecht. Folglich wäre §. 24. FDB = EDB, welches unmöglich ist.

§. 84.

Ein Peripheriewinkel ist, dessen Spitze ein Punkt der Peripherie und dessen Schenkel Sehnen des Cirkels sind. Ein Centriwinkel ist, dessen Spitze der Mittelpunkt, und dessen Schenkel Halbmesser des Cirkels sind. Beyde stehen auf den Bogen, den ihre Schenkel abschneiden. Ein Ausschnitt oder Sector des Cirkels ist die Figur, welche von zwey Halbmessern und dem abgeschnittenen Bogen begrenzt wird. Ein Abschnitt oder Segment des Cirkels ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem abgeschnittnen Bogen begrenzt wird. Solche gerade Linie heißt die Grundlinie des Abschnitts. Von den gleichen Abschnitten, deren Grundlinie der Halbmesser, ist jeder ein halber Cirkel; von den ungleichen Abschnitten aber, deren Grundlinie eine Sehne, ist der mit dem Mittelpunkte größer, und der ihm entgegengesetzte kleiner als ein halber Cirkel. Der Winkel im Abschnitte ist, dessen Spitze ein Punkt des Bogens, und dessen Schenkel von solchem Punkte nach den Endpunkten der Grundlinie gehen.

§. 85.

In jedem Cirkel ist der Centriwinkel BCD doppelt so groß als der Peripheriewinkel BAD, wenn beyde auf einerley Bogen BD, stehen. Fig. 59. 60.

Ist Fig. 59. des Cirkels Mittelpunkt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels BAD, und man ziehet AC und verlängert solche bis E: so ist §. 11. Zus. 1.

AC

AC = CB, folglich §. 15. CAB = CBA, folglich §. 27. BCE = 2 CAB. Nun ist aus eben dem Grunde ECD = 2 CAD. Folglich ist I. §. 46. BCD = 2 BAD.

Ist Fig. 60. der Mittelpunkt außerhalb der Schenkel, und man ziehet ACE: so ist wiederum wie vorher ECD = 2 EAD, und ECB = 2 EAB, folglich I. §. 46. BCD = 2 BAD.

§. 86.

Alle Winkel in ein und demselben Abschnitte, BAD, BED sind einander gleich. Fig. 61.

Es sey §. 68. des Cirkels Mittelpunkt C, und man ziehe CB, CD: so ist §. 85. BCD = 2 BAD = 2 BED, folglich I. §. 47. BAD = BED.

§. 87.

In jedem Cirkel ist der Winkel in einem Abschnitte ABC, nebst dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte CDA, zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Fig. 62.

Ziehet man BD: so ist §. 86. CBD = DAC und DBA = ACD, folglich I. §. 46. ABC = DAC + ACD, folglich I. §. 46. ABC + CDA = DAC + ACD + CDA = 2 R. (§. 46.)

Auf eben die Art beweiset man, daß auch BAD + DCB = 2 R.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß je zwey entgegengesetzte Winkel einer jeden vierseitigen Figur im Cirkel ABCD, zusammen zwey rechten Winkeln gleich sind.

§. 88.

Zwey Abschnitte AEB, CFD, auf gleichen Grundlinien, und mit gleichen Winkeln, sind einander gleich. Fig. 63. 64.

Da AB = CD, so fällt C auf A und D auf B, §. 7. Alsdenn muß auch der Bogen CFD, auf den Bogen AEB, fallen, folglich §. 7. der eine Abschnitt dem andern gleich seyn.

Denn fiel CFD nicht auf AED, sondern etwa darüber wie Fig. 64. und man ziehet AEF, FB, EB: so ist §. 27. AEB > CFD, da doch angenommen, daß AEB = CFD ist.

Zusatz. Hieraus erhellet auch, daß der Durchmesser die Fläche sowohl, als die Peripherie des Cirkels halbiret.

§. 89.

Aufgabe: Einen Cirkel, dessen Abschnitt ABC gegeben ist, zu beschreiben. Fig. 65. 66. 67.

Man halbire §. 19. des Abschnitts Grundlinie AC in D, errichte §. 20. auf AC in D den Perpendikel DB, und ziehe AB:

Es sey zuerst Fig. 65. DAB = DBA, folglich §. 16. DA = DB. Nun ist auch DA = DC, folglich I. §. 45. DB = DC. Folglich ist §. 74. D der Mittelpunkt des verlangten Cirkels.

Es sey zweytens Fig. 66. DAB < DBA. Man mache §. 35. BAE = DBA, verlängre BD bis E, und ziehe EC: so ist §. 16. AE = EB. Nun ist AD = DC, DE = DE, ADE = EDC, folglich §. 14. AE = EC. Folglich ist auch I. §. 45. EB = EC. Demnach ist §. 74. E der Mittelpunkt des verlangten Cirkels.

Es sey drittens Fig. 67. DAB > DBA. Macht man §. 35. BAE = DBA, und ziehet EC; so wird wie zuvor bewiesen, daß EA = EB = EC, folglich §. 74. E der Mittelpunkt des verlangten Cirkels sey.

§. 90.

§. 90.

In gleichen Cirkeln stehen Winkel ACB, EDF, auf gleichen Bogen AKB, ELF, wenn sie einander gleich sind; und sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bogen stehen. Fig. 68.

Ist erstlich ACB = EDF, folglich §. 85. AGB = EHF, und man ziehet AB, EF: so ist §. 11. Zus. 6. AC = CB = ED = DF, folglich §. 14. AB = EF, folglich §. 88. AGB = EHF, folglich §. 11. Zus. 6. und I. §. 46. AKB = ELF.

Ist zweytens AKB = ELF: so sage ich, daß ACB = EDF folglich auch §. 85. AGB = EHF. Denn wäre nicht ACB = EDF: so sey ACM = EDF, folglich nach obigen AKM = ELF. Nun ist angenommen AKB = ELF, folglich wäre I. §. 45. AKM = AKB, welches I. §. 44. unmöglich ist.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß auch die Ausschnitte ACB, EDF, welche gleiche Bogen AKB, ELF, abschneiden, einander gleich seyn müssen.

§. 91.

In gleichen Cirkeln werden von gleichen Sehnen, AB, EF, gleiche Bogen AKB, ELF; und von gleichen Bogen gleiche Sehnen abgeschnitten. Fig. 68.

Ist erstlich AB = EF: so ist §. 17. ACB = EDF folglich §. 90. AKB = ELF.

Ist zweytens AKB = ELF: so ist §. 90. ACB = EDF, folglich §. 14. AB = EF.

§. 92.

Aufgabe: Jeden Cirkelbogen AEFC zu halbiren. Fig. 69.

Ziehet man AC, halbirt sie in D, errichtet den Perpendikel DB, und ziehet AB, BC: so ist §. 14. $AB = BC$, folglich §. 91. $AEB = BFC$.

§. 93.

Der Winkel im halben Cirkel ADB, ist ein rechter Winkel; der im größern Abschnitte DAB, kleiner; der im kleinern Abschnitte BED, größer, als ein rechter Winkel. Fig. 70.

Man verlängre AD nach F, und ziehe DC. Da §. 11. Zus. 1. $CA = CD = CB$: so ist §. 15. $CDA = CAD$, und $CDB = CBD$, folglich I. §. 46. $ADB = CAD + CBD$. Nun ist §. 27. $FDB = CAD + CBD$. Folglich ist I. §. 45. $ADB = FDB$, folglich §. 8. ADB ein rechter Winkel, folglich §. 46. $DAB < \mathfrak{R}$, folglich §. 87. $BED > \mathfrak{R}$.

Zusatz. Ist daher in einem Triangel ABD ein Winkel ADB den beyden übrigen zusammen gleich: so ist er ein rechter Winkel; und so auch umgekehrt.

§. 94.

Wird vom Berührungspunkte D einer Tangente AB eine Sehne DE gezogen: so ist der Winkel, den solche mit der Tangente einschließt EDB, dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte DFE, gleich. Fig. 71.

Es sey §. 20. DF senkrecht auf AB, und FE gezogen: so ist §. 83. DF der Durchmesser, folglich §. 93. FED ein rechter Winkel, folglich §. 24. $FED = FDB$. Nun ist $FDB = FDE + EDB$, und §. 93. Zus. $FED = FDE + DFE$. Folglich ist $FDE + EDB = FDE + DFE$, folglich I. §. 46. $EDB = DFE$.

Zusatz.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß auch EDA dem Winkel in dem entgegengesetzten Abschnitte EGD gleich sey; weil §. 22. EDB + EDA = 2 R. und §. 87. DFE + EGD = 2 R.

§. 95.

Aufgabe: Auf jeder geraden Linie AB einen Abschnitt, wozu der Winkel D gegeben ist, zu beschreiben. Fig. 72. 73. 74.

Es sey zuerst Fig. 72. D < R. Es sey §. 35. BAE = D und §. 20. AF senkrecht auf AE, auch §. 19. AB in G halbirt und §. 20. GC senkrecht auf AB: so ist §. 14. AC = CB, folglich C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AFB = BAE = D.

Es sey zweytens Fig. 73. D = R. Es sey §. 35. BAE = D, und §. 19. AB in C halbirt: so ist C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AGB = BAE = D.

Es sey drittens Fig. 74. D > R. Es sey §. 35. BAE = D und §. 20. AF auf AE senkrecht, auch §. 19. AB in G halbirt, und §. 20. GC auf AB senkrecht: so ist §. 14. AC = CB, folglich C der Mittelpunkt eines Cirkels durch A und B, und §. 94. AHB = BAE = D.

§. 96.

Von jedem Cirkel einen Abschnitt, wozu der Winkel D gegeben ist, abzuschneiden. Fig. 75.

Es sey §. 80. AB eine Tangente in E, und §. 35. BEF = D: so ist §. 94. EGF = BEF = D.

VI. Geradlinichte Figuren am Cirkel.

§. 97.

Eine gerade Linie ist in einem Cirkel eingetragen, wenn sie eine Sehne des Cirkels ist, da sie denn kleiner, als der Durchmesser seyn muß. Eine geradlinichte Figur ist in einem Cirkel, oder auch ein Cirkel ist um eine geradlinichte Figur beschrieben, wenn jede Seite der geradlinichten Figur eine Sehne des Cirkels ist, doch kann auch eine dieser Seiten der Durchmesser seyn. Eine geradlinichte Figur ist um einen Cirkel, oder auch ein Cirkel ist in einer geradlinichten Figur beschrieben, wenn jede Seite der geradlinichten Figur eine Tangente des Cirkels ist.

§. 98.

Aufgabe: In jedem Cirkel eine gerade Linie D, die kleiner als der Durchmesser ist, einzutragen. Fig. 76.

Man ziehe den Durchmesser AB, mache §. 13. AE = D, beschreibe aus A mit AE einen Cirkel, und ziehe AF: so ist AF = AE = D.

§. 98. *

Aufgabe: Es sind zwey ungleiche gerade Linien AB, BG, gegeben; man soll eine Linie finden, deren Quadrat mit dem Quadrate der kleinern gegebenen Linie BG, zusammen dem Quadrate der größern AB, gleich sey. Fig. 73.

Man halbire AB in C, beschreibe aus C mit CA einen Cirkel, trage §. 98. in denselben BG, und ziehe GA: so ist solche die verlangte Linie.

Denn da §. 93. AGB ein rechter Winkel: so ist §. 65. $AB^q = BG^q + GA^q$.

§. 99.

Aufgabe: In jeden Cirkel einen Triangel, wozu die Winkel A, B, D, gegeben sind, zu beschreiben. Fig. 77.

Es sey §. 80. EF eine Tangente in G. Auch sey §. 35. FGH = ABD, und EGK = ADB. Ziehet man KH: so ist §. 94. HKG = FGH = ABD, und GHK = EGK = ADB, folglich §. 46. KGH = BAD.

§. 100.

Aufgabe: Um jeden Cirkel einen Triangel, wozu die Winkel A, B, D, gegeben sind, zu beschreiben. Fig. 78.

Man verlängere BD zu beyden Seiten, und ziehe vom Mittelpunkte C willkührlich die CG. Nun sey §. 35. GCH = ABE, und GCK = ADF. Legt man §. 80. in den Punkten G, H, K, Tangenten LM, MN, NL, so müssen §. 43. solche einander schneiden.

Da §. 47. Zus. in CGMH die Winkel zusammen 4 rechten Winkeln gleich sind; und §. 80. CHM + CGM = 2 R: so ist GCH + HMG = 2 R. Nun ist §. 22. ABD + ABE = 2 R. Folglich ist I. §. 45. GCH + HMG = ABD + ABE. Nun ist GCH = ABE. Folglich ist I. §. 46. HMG = ABD. Nun wird eben so bewiesen, daß GLK = ADB. Folglich ist auch §. 46. HNK = BAD.

§. 101.

Aufgabe: In jedem Triangel ABD einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 79.

Es sey §. 18. DBA, und ADB, von BC und DC halbirt, welche §. 43. in C zusammentreffen; auch sey §. 21. CE, CF, CG, senkrecht: so ist CBE = CBF,

CEB = CFB, CB = CB, folglich §. 38. CE = CF. Nun beweist man eben so, daß CG = CF. Folglich ist CE = CG = CF, folglich §. 74. C der Mittelpunkt eines Cirkels durch E, F, G, und §. 80. AB, BD, DA Tangenten.

§. 102.

Aufgabe: Um jeden Triangel ABD, einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 80.

Es sey §. 19. AB, AD, in E, F, halbirt, und §. 20. EC, FC, senkrecht, welche §. 43. in C zusammentreffen: so ist §. 68. in EC und FC, folglich in C der Mittelpunkt des Cirkels durch A, B, D, und AB, BD, DA, Sehnen.

Zusatz. Hieraus erhellet, wenn drey Punkte, A, B, D, die nicht in einer geraden Linie liegen, gegeben sind; wie man durch solche einen Cirkel beschreiben könne.

§. 103.

Aufgabe: In jedem Cirkel ein Quadrat zu beschreiben. Fig. 81.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, DE senkrecht, und verbinde AE, EB, BD, DA: so sind diese Linien §. 14. einander gleich, und die davon eingeschlossenen Winkel §. 93. rechte Winkel, folglich AEBD ein Quadrat.

§. 104.

Aufgabe: Um jeden Cirkel ein Quadrat zu beschreiben. Fig. 82.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, DE senkrecht, und §. 80. in A, E, B, D, Tangenten, FK, KH, HG, GF, welche §. 43. zusammentreffen: so sind solche §. 41. den Durchmessern, AB, DE, parallel, und §. 49. gleich, folglich I. §. 45. einander selbst gleich, und die

davon

davon eingeschlossenen Winkel §. 49. den Winkeln bey C gleich, folglich rechte Winkel. Demnach ist FGHK ein Quadrat.

§. 105.

Aufgabe: In jedes Quadrat FGHK einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 82.

Man halbire §. 19. GF, FK, in D, A, und ziehe §. 42. durch A und D, die AB und DE, den Seiten des Quadrats parallel: so ist, weil GF = FK, I. §. 47. DF = FA, folglich §. 49. CA = CD. Nun wird eben so bewiesen, daß CD = CB = CE = CA. Folglich gehet aus C, durch A, E, B, D, ein Cirkel, dessen Tangenten §. 80. die Seiten des Quadrats sind.

§. 106.

Aufgabe: Um ein gegebnes Quadrat AEBD einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 81.

Man ziehe die Diagonalen AB, DE: so ist AD = DB; AE = EB; DE = DE; folglich §. 17. ADE = EDB = ½ R. Nun beweist man eben so, daß auch BAD = ½ R. Folglich ist ADE = BAD, folglich §. 16. CA = CD. Eben so beweist man, daß CD = CB = CE = CA. Folglich gehet aus C ein Cirkel durch A, E, B, D.

§. 107.

Aufgabe: In jedem Cirkel eine reguläre sechsseitige Figur zu beschreiben. Fig. 83.

Durch den Mittelpunkt C ziehe man AB, und aus B mit BC einen Cirkel. Man verbinde DB, BE, EC, CD; verlängere EC, DC, nach G und F; und ziehe EF, FA, AG, GD.

Da §. 11. Zus. 1. BC = CD, und DB = BC, folglich I. §. 45. CD = DB: so ist ΔCDB gleichseitig, folglich

lich §. 15. die Winkel gleich, und jeder §. 46. der dritte Theil von 2 rechten Winkeln. Aus gleichen Gründen gilt dies auch vom △CBE, folglich auch §. 22. vom △CEF, folglich §. 25. auch von den drey übrigen Triangeln. Demnach ist AGDBEF gleichseitig und gleichwinklicht.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß die Seite jeder regulären sechsseitigen Figur dem Halbmesser des Cirkels, worinn sie beschrieben ist, gleich sey.

Anmerkung. Ziehet man Fig. 81. durch des Cirkels Mittelpunkt C, AB, DE senkrecht, verbindet AD, halbirt AC in F, und ziehet aus F mit FD den Bogen DG: so ist von den regulären Figuren, die man in den Cirkel beschreiben kann, DA die Seite des Quadrats; CG die Seite des regulären Dekagons; DG die Seite des regulären Pentagons; DC die Seite des regulären Hexagons; und Fig. 83. AE die Seite des regulären Triangels. Das Nähere vom Pentagon folgt §. 151.

§. 108.

Aufgabe: Um jeden Cirkel eine reguläre sechsseitige Figur zu beschreiben. Fig. 84.

Man beschreibe §. 107. in den Cirkel, dessen Mittelpunkt C, eine reguläre sechsseitige Figur ABDEFG, und ziehe in gedachten Punkten §. 80. Tangenten, die §. 43. zusammentreffen: so ist das verlangte geschehen.

Da §. 11. Zus. 1. CA = CB, folglich §. 15. CAB = CBA, und §. 24. CAK = CBK: so ist I. §. 46. KAB = KBA, folglich §. 16. AK = KB, folglich §. 17. AKC = CKB, und ACK = KCB. Demnach ist AKB sowohl als ACB von CK halbirt. Nun wird dies von allen übrigen Winkeln eben so bewiesen. Folglich ist KB = BL, KA = AH, folglich HK = KL u. s. w. und HKL = KLM u. s. w. Demnach ist HKLMNO gleichseitig und gleichwinklicht.

§. 109.

Aufgabe: In jede reguläre sechsseitige Figur ABDEFG einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 85.

Man halbire §. 18. die Winkel ABD, BDE, und ziehe CE, CF, CG, CA. Von C fälle man §. 21. Perpendikel auf die Seiten der gegebenen Figur: so sind diese alle einander gleich, und es gehet daher aus C ein Cirkel durch H, K, L, M, N, O. Denn da AB = BD, BC = BC, ABC = CBD: so ist §. 14. BAC = BDC. Folglich ist auch BAG und so alle übrige Winkel halbirt. Nun ist CHB = CKB, CBH = CBK, CB = CB. Folglich ist §. 38. CH = CK. Auf eben die Art beweist man auch, daß CK = CL = CM = CN = CO = CH.

§. 110.

Aufgabe: Um jede reguläre sechsseitige Figur ABDEFG, einen Cirkel zu beschreiben. Fig. 86.

Es sey §. 18. ABD, BDE, von BC, DC halbirt, welche §. 43. in C zusammentreffen. Ziehet man nun CE, CF, CG, CA: so ist auf eben die Art wie §. 109. erweislich, daß auch alle übrige Winkel so halbirt, und daher einander gleich sind. Folglich ist §. 16. CA = CB = CD = CE = CF = CG. Demnach gehet ein Cirkel aus C mit CA durch A, B, D, E, F, G.

VII. Aehnlichkeit geradlinichter Figuren.

§. 111.

Jede Größe, wenn man sie mit einer andern ihrer Art vergleicht, kann durch, rationale oder irrationale, Zahlen ausgedrückt werden.

Ist erstlich eine Größe das Vielfache einer andern: so kann erstere durch eine Zahl, deren Einheit die andre Größe ist, ausgedrückt werden.

So

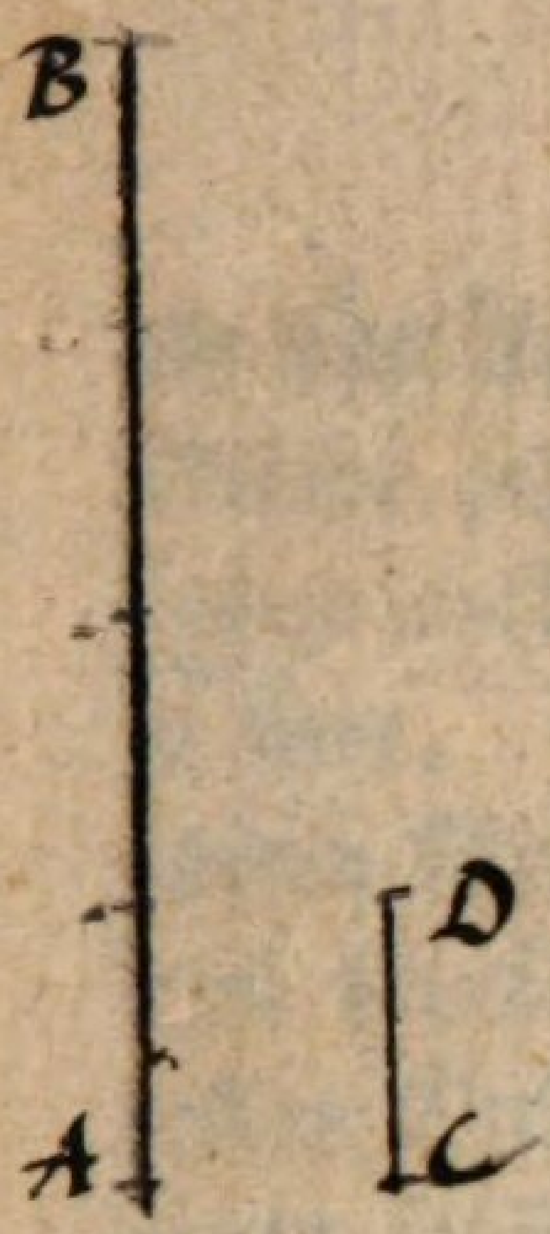
So ist Fig. 87. die gerade Linie AB das Vierfache einer andern CD, und kann, wenn man die andre zur Einheit annimmt, durch die rationale ganze Zahl 4 ausgedrückt werden; weil AB = 4 . CD = 4 . 1 = 4.

Ist zweytens eine Größe das Vielfache eines bestimmten Theils der andern: so kann erstere durch eine Zahl, deren Einheit der bestimmte Theil der andern Größe ist, ausgedrückt werden.

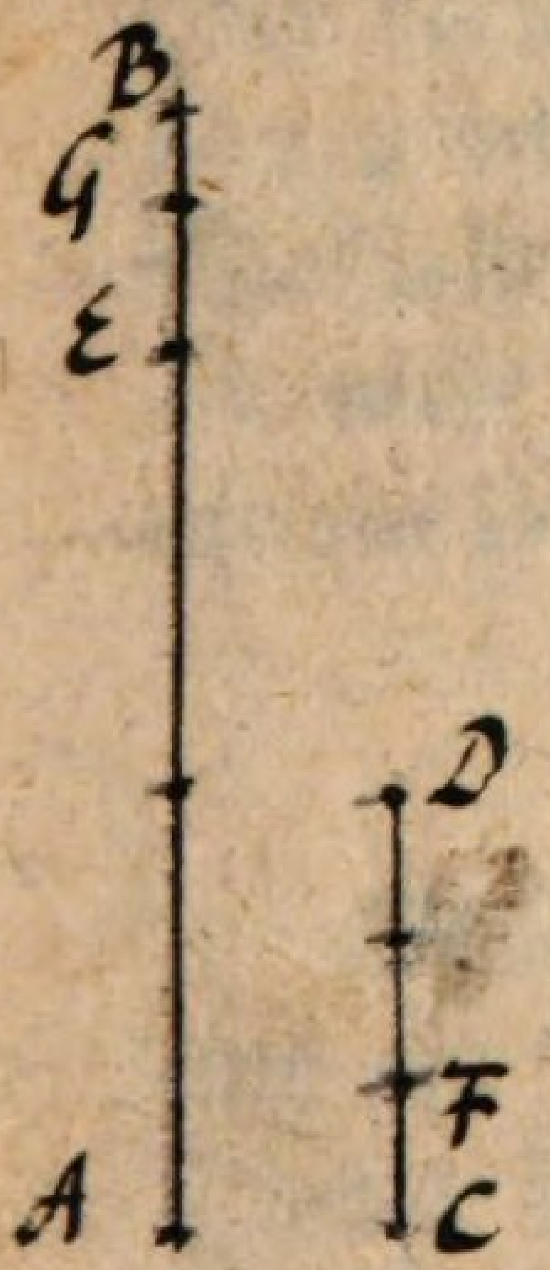
So ist Fig. 88. die gerade Linie AB das dreyfache der CE, oder des vierten Theils einer andern CD, und kann, wenn man die andre zur Einheit annimmt, durch den rationalen Bruch $\frac{3}{4}$ ausgedrückt werden; weil AB = 3 . CE = 3 . $\frac{1}{4}$. CD = $\frac{3}{4}$. CD = $\frac{3}{4}$. 1 = $\frac{3}{4}$.

Ist drittens eine Größe weder das Vielfache einer andern, noch das Vielfache irgend eines bestimmten Theils der andern: so kann erstere durch keine Zahl, deren Einheit die andre Größe oder irgend ein bestimmter Theil derselben ist, das ist, durch keine rationale Zahl ausgedrückt werden. In diesem Falle ist irgend ein Vielfaches der andern Größe, oder jedes bestimmten Theils derselben kleiner, mit dem Einfachen vermehrt aber größer als die erstere; so daß der Unterschied jedesmal kleiner ist, als die andre Größe, und als der bestimmte Theil derselben; und daher durch Verminderung des bestimmten Theils so klein als man will gemacht werden kann, doch ohne daß er je ganz aufhörte. Demnach kann die erste Größe durch eine Zahl, deren Einheit der kleinste noch unbestimmte Theil der andern Größe ist, das ist, durch eine Irrationalzahl ausgedrückt werden.

So ist Fig. 89. die gerade Linie AB größer als das Zweyfache, und kleiner als das Dreyfache einer andern CD; oder, wenn man CD in drey gleiche Theile theilt, deren einer CF, größer als das Siebenfache, und kleiner


B
D
A
C

D
B
E
C
A


B
G
E
D
F
A
C

als das Achtfache der CF, so daß der Rest GB < CF ist. Bliebe nun, wenn man CF wiederum theilte, und den daher entstehenden Theil abermals theilte, und dies immer so fort, jedesmal die erstere Größe AB zwischen irgend einem Vielfachen eines solchen Theils, und diesem durch das Einfache vermehrten Vielfachen: so kann man die erstre Größe AB durch eine Zahl, welche das Vielfache eines solchen immer kleinern Theils der andern, die man zur Einheit annimmt, immer genauer und genauer anzeigt, das ist, durch eine Irrationalzahl von der Form 2, 3 . . . . . ausdrücken.

§. 112.

Größen, welche sich (auf die vorher beschriebene Art) durch rationale Zahlen ausdrücken lassen, heißen commensurabel, oder rational; die sich aber nur durch irrationale Zahlen ausdrücken lassen, incommensurabel oder irrational.

So sind AB, CD in Fig. 87. 88. commensurabel oder rational; hingegen in Fig. 89. incommensurabel oder irrational, wenn bey jeder Eintheilung der CD, ein Vielfaches des jedesmal daher entstehenden Theils die AB nicht erschöpft, sondern einen Rest läßt, der kleiner als ein solcher Theil ist.

§. 113.

Größen sind in einer Verhältniß, in so fern die eine ein Vielfaches eines bestimmten oder unbestimm- Theils der andern ist. Eine Zahl, welche solches Vielfache anzeigt, heißt der Verhältnißname; daher die Verhältniß nach Beschaffenheit des Verhältnißnamens rational oder irrational ist. Zwey Größen sind zwey andern Größen proportionirt, wenn der Verhältnißname beyder Paare einerley ist, er mag nun

nun rational oder irrational seyn. Zwey Größen sind zwey andern umgekehrt proportionirt, wenn das eine Paar die äußern, und das andre Paar die mittlern Glieder der Proportion giebt.

So sind vier gerade Linien, A, B, C, D, proportionirt entweder wenn Fig. 90. D in C so vielmal enthalten ist, als B in A; oder wenn Fig. 91. B und D in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt ist, und ein solcher Theil von D in C so vielmal enthalten ist, als ein solcher von B in A; oder wenn Fig. 92. bey jeder solcher Theilung der B und D, ein Theil von D in C immer so vielmal mit einem kleinern Reste enthalten ist, als ein Theil von B in A mit einem kleinern Reste.

§. 114.

Geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn die eine mit der andern einerley Winkel hat, und die Seiten, welche einerley Winkel einschließen, einerley Verhältniß haben; oder kürzer: wenn ihre Winkel gleich, und ihre gleichliegenden Seiten proportionirt sind. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist (∾).

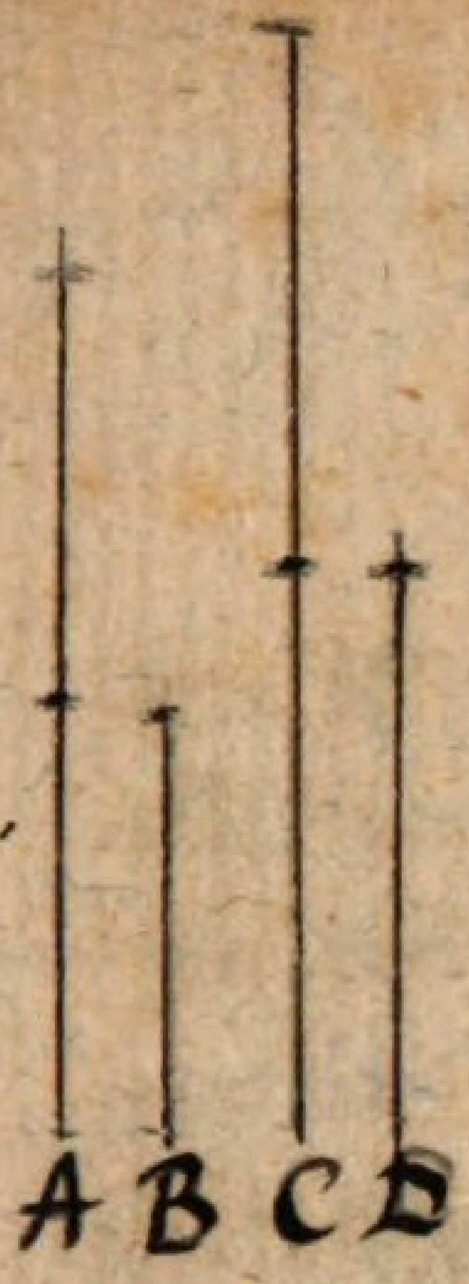
Zusatz. In zwey geradlinichten Figuren sind die Seiten umgekehrt proportionirt, wenn zwey Seiten der einen die äußern und zwey gleichliegende Seiten der andern die mittlern Glieder der Proportion geben. (§. 113.)

§. 115.

Triangel ABC, ACD, wie auch Parallelogramme EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien BC, CD. Fig. 93. 94.

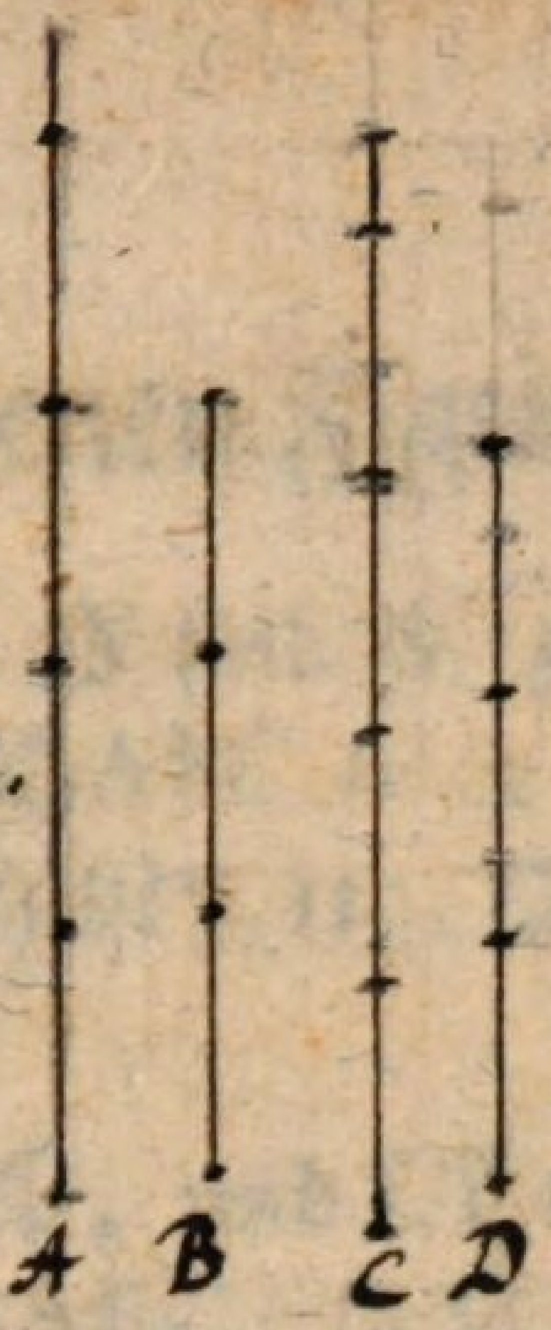
Erstlich sind BC, CD, commensurabel Fig. 93. so ist ein bestimmter Theil von BC, als BG, etlichemal in CD enthalten. Es sey daher BC = 2 BG und CD = 3 BG. Ziehet man nun von A nach jeden Theilpunkt

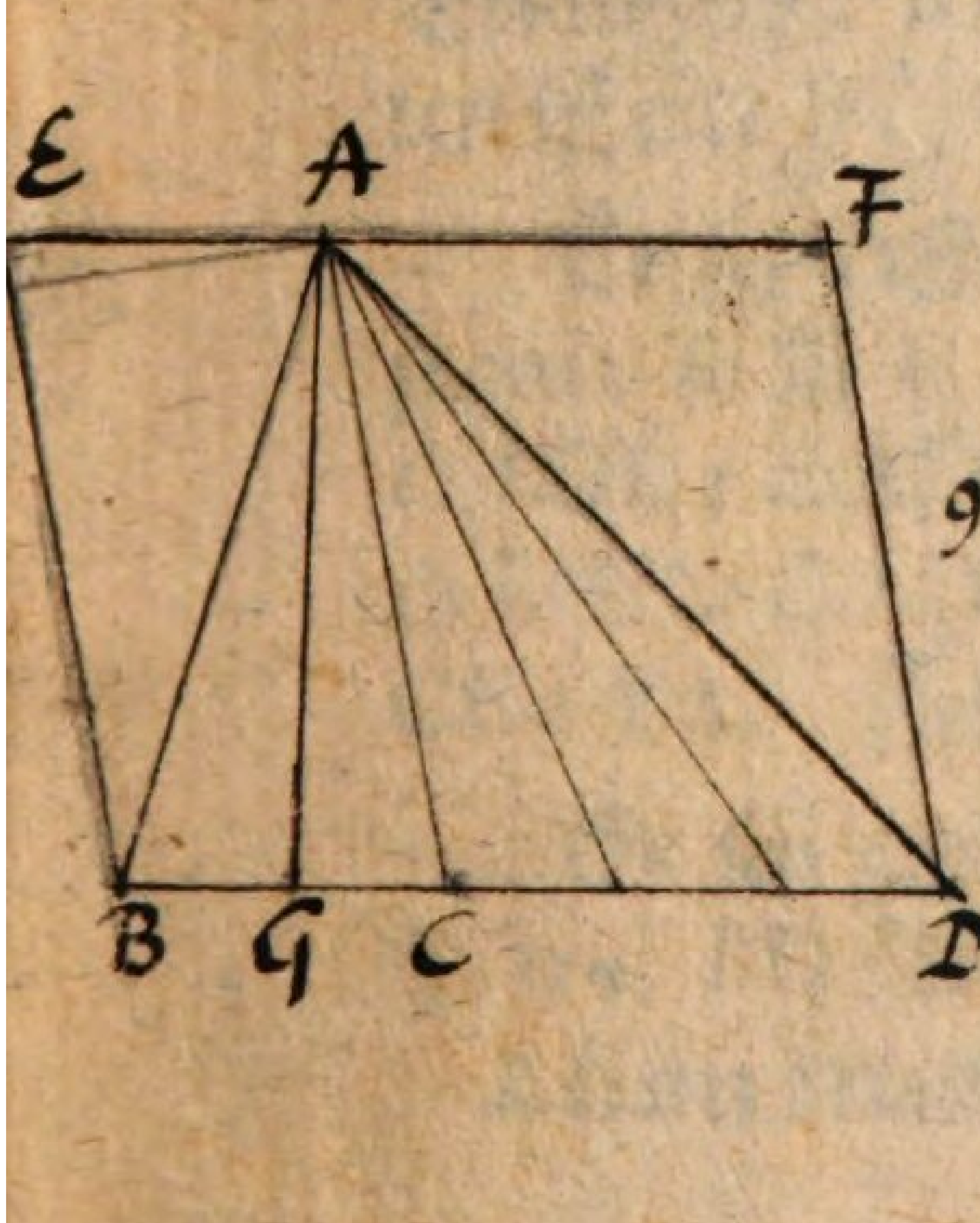
90.



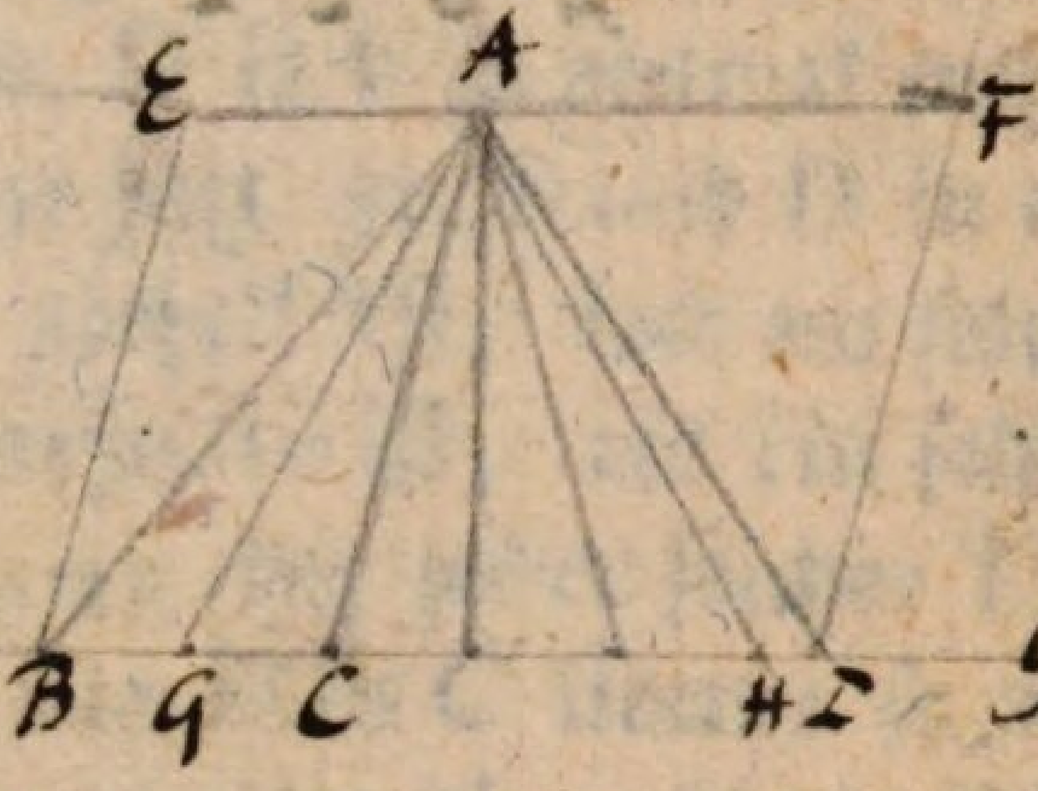
91.

92.





93.



94.

der BC, CD, gerade Linien: so sind §. 56. die Triangel alle einander gleich, und △ABC = 2 △ABG, auch △ACD = 3 △ABG. Folglich ist §. 113. △ABC : △ACD = BC : CD.

Da §. 59. EC = 2 △ABC, und CF = 2 △ACD: so ist II. §. 79. EC : CF = △ABC : △ACD. Nun war △ABC : △ACD = BC : CD. Folglich ist II. §. 73. EC : CF = BC : CD.

Zweytens sind BC, CD, incommensurabel Fig. 94. so ist jeder bestimmte Theil von BC, als BG, etlichemal in CD mit einem kleinern Reste enthalten. Es sey daher BC = 2 BG und CD = 3 BG + HD. Ziehet man nun von A gerade Linien nach jedem Theilpunkte: so sind §. 56. die Triangel alle einander gleich, und △ABC = 2 △ABG, auch △ACD = 3 △ABG + △AHD. Folglich ist §. 113. △ABC : △ACD = BC : CD.

Aus eben den Gründen, wie zuvor, ist auch hier EC : CF = △ABC : △ACD = BC : CD.

§. 116.

Ist in einem Triangel ABC, eine gerade Linie DE, der einen Seite BC, parallel: so schneidet sie die beyden andern Seiten AB, AC, proportionirt. Und schneidet eine gerade Linie DE, zwey Seiten eines Triangels, AB, AC, proportionirt: so ist sie der dritten Seite BC, parallel. Fig. 95.

Es sey erstlich DE, BC, parallel, und BE, CD gezogen: so ist §. 55. △BDE = △CDE, folglich II. §. 74. △BDE : △ADE = △CDE : △ADE. Nun ist §. 115. △BDE : △ADE = BD : DA, und △CDE : △ADE = CE : EA. Folglich ist II. §. 73. BD : DA = CE : EA.

Es sey zweytens BD : DA = CE : EA. Nun ist §. 115. BD : DA = △BDE : △ADE, und CE : EA =

△CDE : △ADE. Folglich ist II. §. 73. △BDE : △ADE = △CDE : △ADE, folglich II. §. 75. △BDE = △CDE, folglich §. 57. DE, CB parallel.

Zusatz. 1. Durch die Abänderung II. §. 79. ist auch AD : DB = AE : EC, und BA : DA = CA : EA; auch AD : AE = DB : EC, und BA : CA = DA : EA.

2. Außerdem ist auch AB : BC = AD : DE. Denn ziehet man der AC die DF parallel, so ist nach Obigen BA : AD = BC : CF. Nun ist §. 49. CF = ED. Folglich ist BA : AD = BC : ED, folglich II. §. 79. AB : BC = AD : DE.

§. 117.

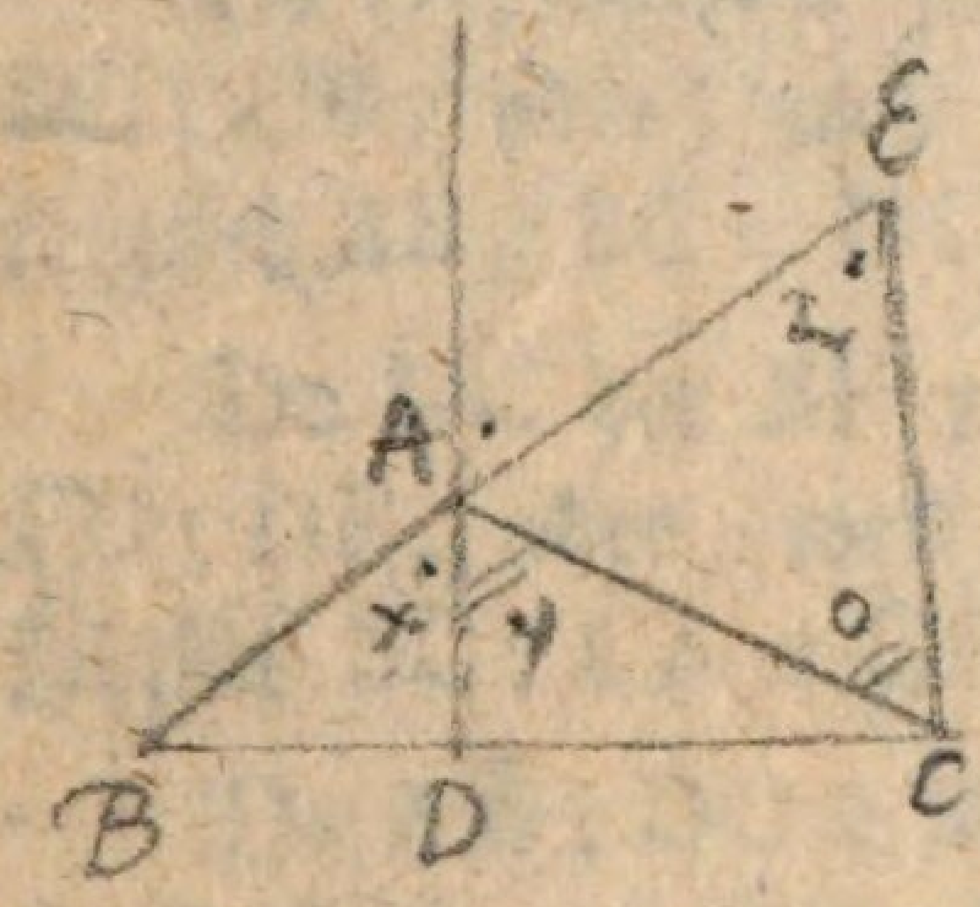
Eine gerade Linie AD, von der Spitze A eines Triangels ABC, an die Grundlinie BC, schneidet solche den Schenkeln BA, AC, proportionirt, wenn sie den entgegengesetzten Winkel BAC, halbirt; und halbirt solchen Winkel, wenn sie die Grundlinie den Schenkeln proportionirt schneidet. Fig. 96.

Es sey zuerst BAD = DAC; BA verlängert; und §. 42. CE der AD parallel: so ist §. 44. BAD = BEC, und DAC = ACE; folglich I. §. 45. BEC = ACE; folglich §. 15. EA = AC. Nun ist §. 116. BD : DC = BA : AE. Folglich ist BD : DC = BA : AC.

Es sey zweytens BD : DC = BA : AC; und CE, AD parallel: so ist §. 116. BD : DC = BA : AE; folglich II. §. 73. BA : AC = BA : AE; folglich II. §. 75. AC = AE; folglich §. 15. BEC = ACE. Nun ist §. 44. BEC = BAD und ACE = DAC. Folglich ist I. §. 45. BAD = DAC.

§. 118.

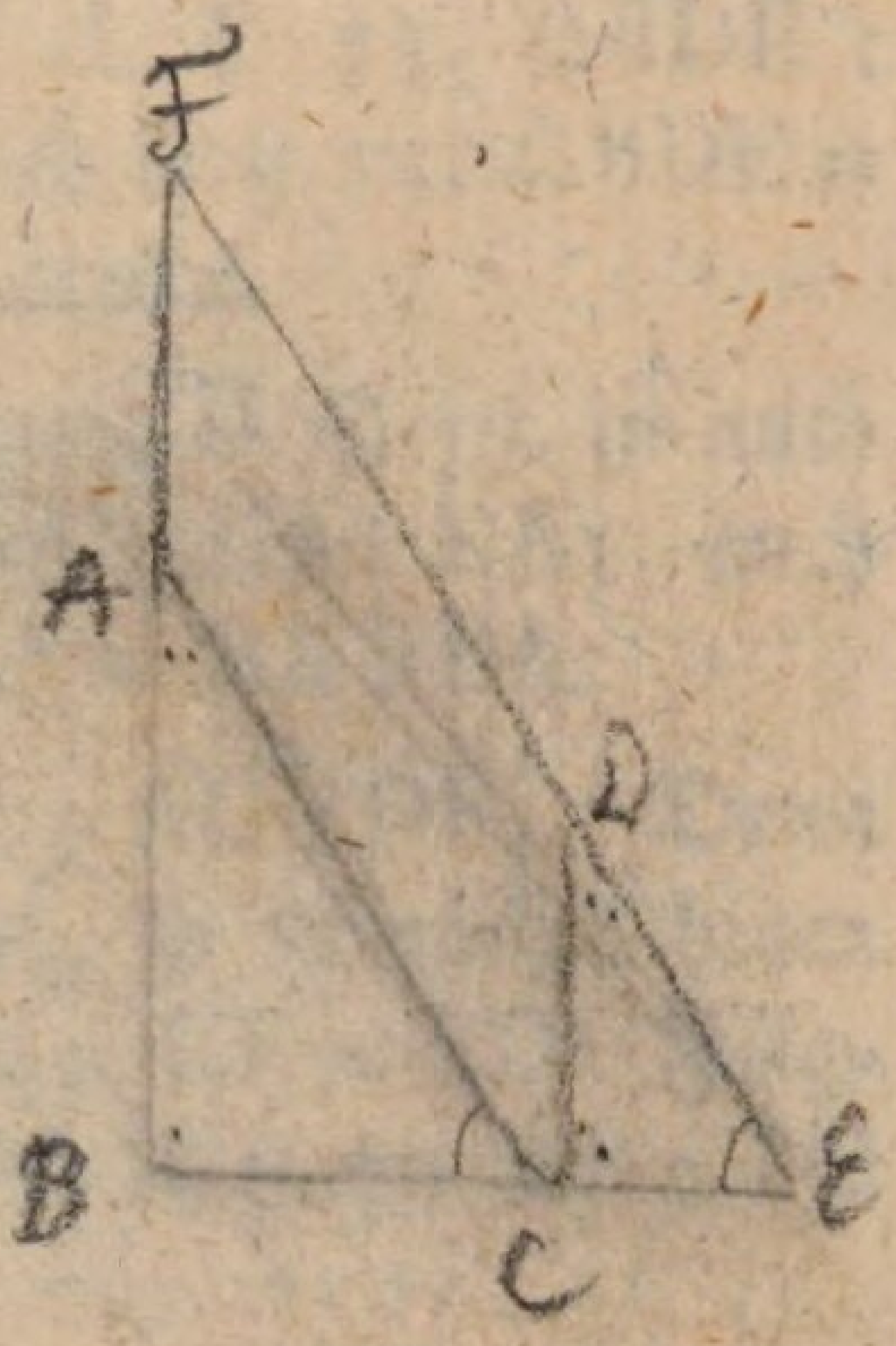
Sind in zwey Triangeln ABC, DCF, die Winkel des einen den Winkeln des andern gleich: so sind die Seiten,

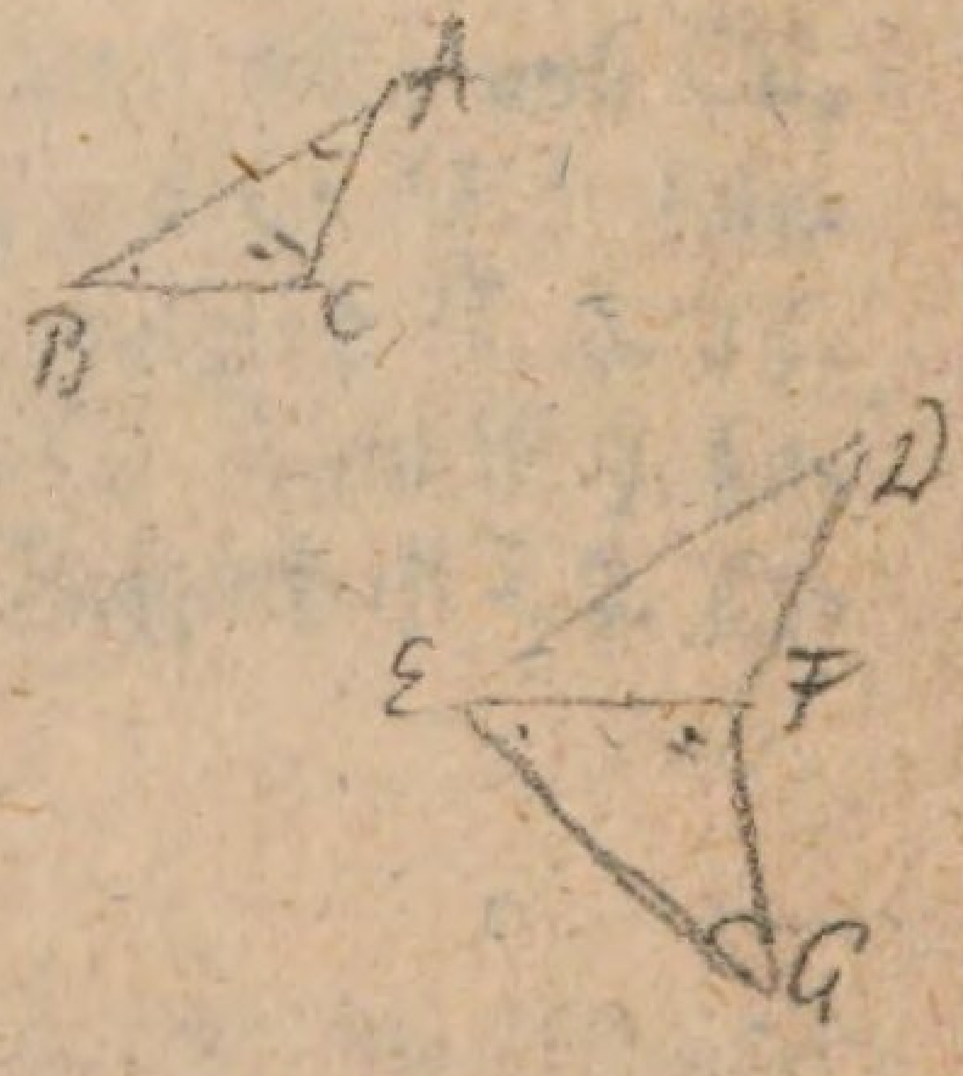


$x = y$ ex hyp
$x = z$ #

$y = z$
$y = o$ #

$z = o$


F
A
D
B
C
E


A
B
C
D
E
F
G

Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt, und zwar die, welche gleichen Winkeln entgegengesetzt sind, gleichnamig. Fig. 97.

Man bringe die Triangel so an einander, daß die gleichen Winkel einerley Lage haben, und BC, CE, in gerader Linie sind; und verlängere BA, ED, welche §. 43. in F zusammentreffen, weil §. 28. ABC + ACB < 2 R, und angenommen ist, daß ACB = DEC.

Da ABC = DCE, und ACB = DEC: so ist §. 41. DC der BF, und AC der EF parallel; folglich CF ein Parallelogramm, folglich §. 49. AC = DF, und FA = CD.

Da AC der EF parallel: so ist §. 116. BA : AF = BC : CE, oder, weil AF = DC, AB : DC = BC : CE, folglich AB : BC = DC : CE.

Da DC der BF parallel: so ist §. 116. BC : CE = FD : DE, oder, weil FD = CA, BC : CE = CA : ED, folglich BC : CA = CE : ED.

Da AB : DC = BC : CE, und BC : CE = CA : ED: so ist II. §. 73. AB : DC = CA : ED; folglich BA : AC = CD : DE.

§. 119.

Sind in zwey Triangeln ABC, DEF die Seiten des einen den Seiten des andern proportionirt: so sind die Winkel, welche gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich. Fig. 98.

Es sey §. 35. FEG = ABC, und EFG = BCA; folglich §. 46. EGF = BAC. Folglich ist §. 118. AB : BC = GE : EF. Nun ist angenommen AB : BC = DE : EF. Folglich ist GE : EF = DE : EF; folglich GE = DE. Auf eben die Art beweist man, daß GF = DF. Nun ist auch EF = EF. Folglich ist §. 17. DEF = GEF = ABC; DFE = GFE = ACB; EDF = EGF = BAC.

§. 120.

Ist in zwey Triangeln ABC, DEF, ein Winkel BAC, des einen, einem Winkel EDF, des andern gleich, und die solche Winkel einschließenden Seiten proportionirt: so sind die Winkel, welche gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich. Fig. 99.

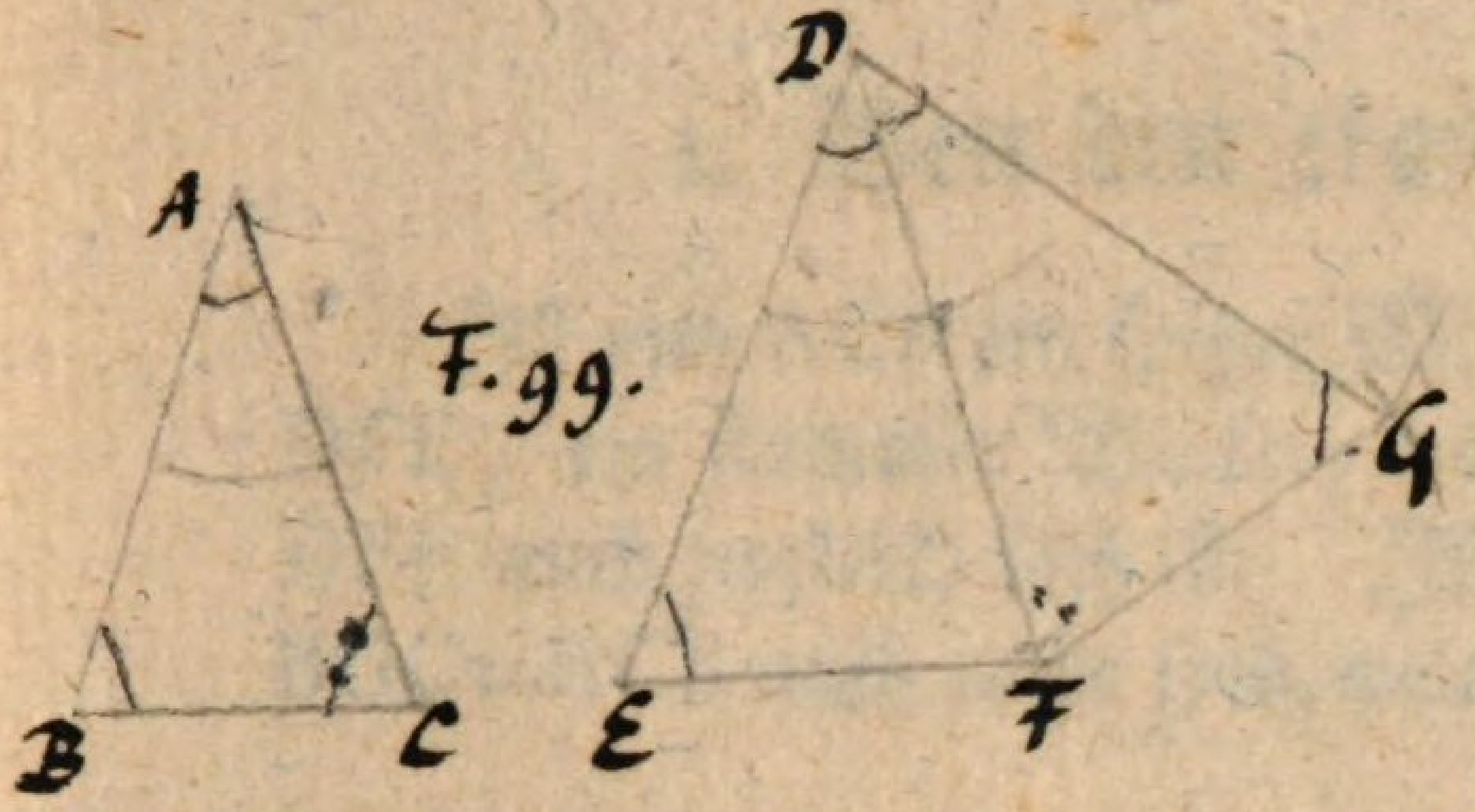
Es sey §. 35. FDG = BAC = EDF, und DFG = ACB; folglich §. 46. DGF = ABC. Folglich ist §. 118. BA : AC = GD : DF. Nun ist angenommen, BA : AC = ED : DF. Folglich ist GD : DF = ED : DF; folglich GD = ED. Nun ist auch DF = DF, und GDF = EDF. Folglich ist §. 14. DFE = DFG = ACB und DEF = DGF = ABC.

§. 121.

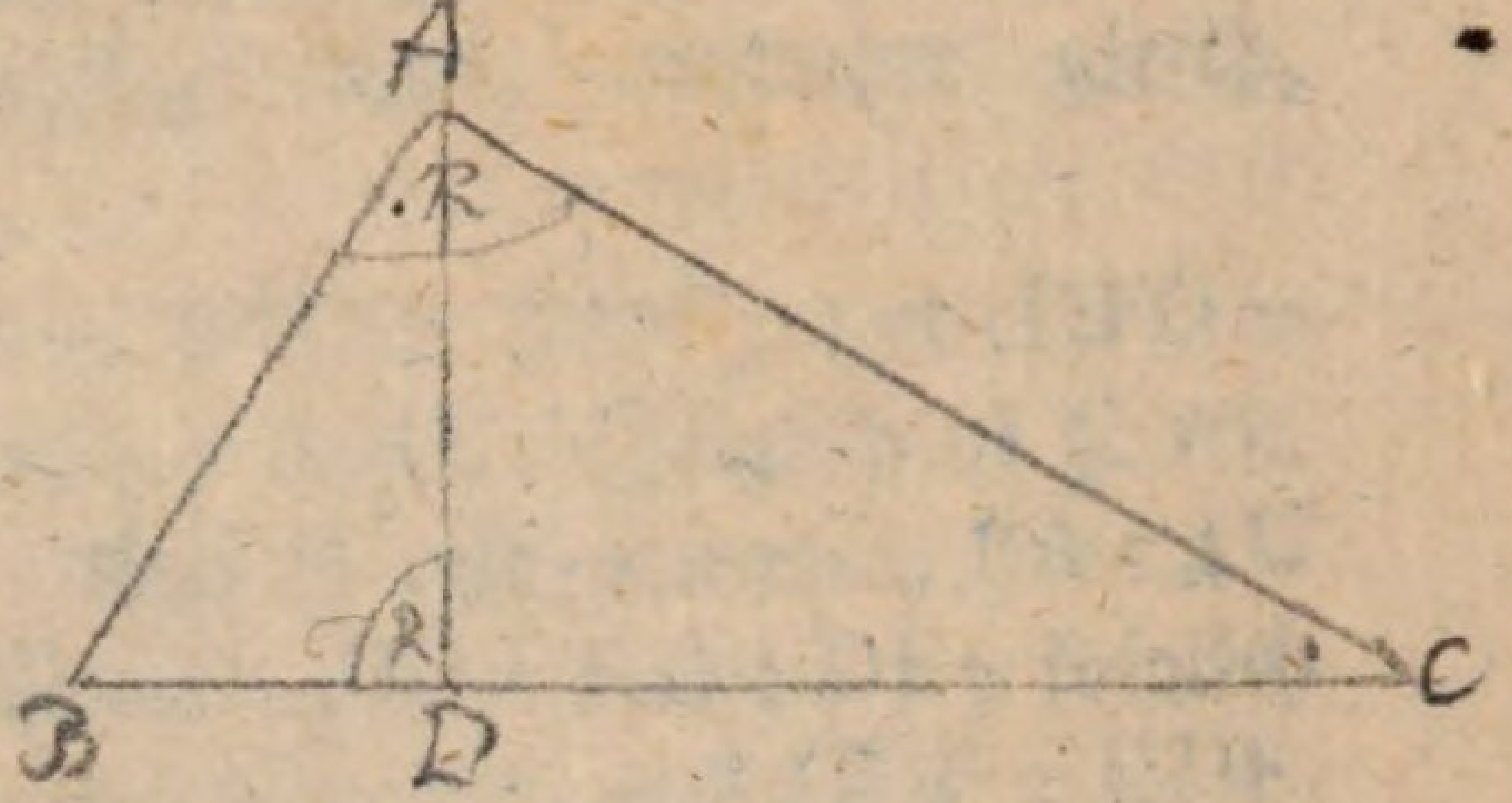
Sind in zwey Triangeln ABC, DEF, zwey Seiten des einen AB, BC, zweyen Seiten des andern DE, EF proportionirt, und die Winkel BAC, EDF, welche zwey gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, einander gleich, ferner die Winkel ACB, DFE, welche den beyden andern gleichnamigen Seiten entgegengesetzt sind, zugleich spitz, oder zugleich nicht spitz: so sind die Winkel ABC, DEF, welche von den proportionirten Seiten eingeschlossen werden, einander gleich. Fig. 100.

Gesetzt diese Winkel wären ungleich, so daß der eine, etwa ABC > DEF wäre: so sey ABG = DEF. Nun ist angenommen BAC = EDF; Folglich wäre §. 46. AGB = DFE; folglich §. 118. AB : BG = DE : EF. Nun ist angenommen AB : BC = DE : EF. Folglich wäre AB : BG = AB : BC; folglich BG = BC, folglich §. 15. ACB = BGC.

Ist



F. 99.
A
B
C
D
E
F
G


A
R
R
B
D
C

Ist nun ACB ein spitzer Winkel: so ist §. 22. AGB = DFE, ein stumpfer Winkel, da doch angenommen, daß DFE auch zugleich spitz ist. Ist ACB nicht spitz: so ist BGC = ACB auch nicht spitz, welches §. 28. unmöglich ist.

§. 122.

Jeden rechtwinklichten Triangel ABC, theilt ein Perpendikel AD, von der Spitze des rechten Winkels A, auf die Hypothenuse BC, in zwey dem Ganzen und einander selbst ähnliche Triangel ABD, ADC. Fig. 101.

Da §. 24. ADB = BAC; auch ABD = ABC; folglich §. 46. BAD = BCA: so sind §. 118. die Seiten proportionirt, und §. 114. △ABD ∼ △ABC. Eben so wird bewiesen, daß △ADC ∼ △ABC.

Da §. 24. ADB = ADC, und nach Obigen BAD = BCA; folglich §. 46. ABD = DAC: so sind §. 118. die Seiten proportionirt, und §. 114. △ABD ∼ △ADC.

Zusatz. 1. Daher ist solcher Perpendikel AD die mittlere Proportionallinie zu den Abschnitten der Hypothenuse BD, DC; weil §. 118. BD : AD = AD : DC. Auch ist zur Hypothenuse BC, und jedem ihrer Abschnitte BD, DC, der an solchem Abschnitte liegende Kathete AB, AC, die mittlere Proportionallinie; weil §. 118. BC : AB = AB : BD, und BC : AC = AC : CD.

2. Zwey geradlinichte Figuren, welche einer dritten ähnlich, sind selbst ähnlich.

§. 123.

Aufgabe: Von einer geraden Linie AB, einen bestimmten Theil abzuschneiden. Fig. 102.

Legt man an BA die AC unter beliebigen Winkel BAC, trägt auf AC so viel gleiche Theile AD, DE, EC, als ver-

 langt

langt wird, ziehet CB, und macht §. 42. DF der CB parallel: so ist §. 116. AD : AC = AF : AB. Nun ist AD = $\frac{1}{3}$AC. Folglich ist AF = $\frac{1}{3}$AB.

§. 124.

Aufgabe: Eine ungetheilte gerade Linie AB, einer getheilten AC, proportionirt zu schneiden. Fig. 103.

Legt man AC, welche beliebig in D und E getheilt ist, unter beliebigen Winkel an BA, ziehet CB, und macht §. 42. DF, EG, der CB, und DK der AB parallel: so sind FH, HB, Parallelogramme, folglich §. 49. DH = FG, und HK = GB. Nun ist §. 116. AD : DE = AF : GF und DE : EC = DH : HK = FG : GB.

§. 125.

Aufgabe: Zu zwey geraden Linien, AB, AC, die dritte Proportionallinie zu finden. Fig. 104.

Legt man BA, AC, unter beliebigen Winkel an einander, verlängert sie nach D und E, macht BD = AC, ziehet BC, und §. 42. DE der BC parallel: so ist §. 116. AB : BD = AC : CE, worinn BD = AC.

§. 126.

Aufgabe: Zu drey geraden Linien, A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden. Fig. 105.

Es sey willkührlich ein Winkel EDF. Macht man DG = A; GE = B; DH = C; ziehet GH, und §. 42. EF der GH parallel: so ist §. 116. DG : GE = DH : HF, oder A : B = C : HF.

§. 127.

Aufgabe: Zu zwey geraden Linien, AB, BC, die mittlere Proportionallinie zu finden. Fig. 106.

Man

Man lege AB, BC in einer geraden Linie an einander, halbire AC, und beschreibe den halben Cirkel ADC. Auf AC errichte man §. 20. in B den Perpendikel BD, und ziehe DA, DC: so ist §. 93. ADC ein rechter Winkel; folglich §. 122. AB : BD = BD : BC.

§. 128.

Ist in zwey gleichen Parallelogrammen, AB, BC, ein Winkel des einen, FBD, einem Winkel des andern, EBG, gleich: so sind die solche Winkel einschliessenden Seiten umgekehrt proportionirt. Auch sind zwey Parallelogramme, AB, BC, einander gleich, wenn ein Winkel des einen, FBD, einem Winkel des andern, EBG, gleich ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt sind. Fig. 107.

Es sey zuerst AB = BC. Bringt man DB, BE in eine gerade Linie: so sind §. 26. auch FB, BG, in einer geraden Linie. Vollendet man nun das Parallelogramm FE: so ist II. 74. AB : FE = BC : FE. Nun ist §. 115. AB : FE = DB : BE, und BC : FE = GB : BF. Folglich ist II. §. 73. DB : BE = GB : BF.

Es sey zweytens DB : BE = GB : BF. Nun ist §. 115. DB : BE = AB : FE, und GB : BF = BC : FE. Folglich ist II. §. 73. AB : FE = BC : FE. Folglich ist II. §. 75. AB = BC.

§. 129.

Ist in zwey gleichen Triangeln ABC, ADE, ein Winkel des einen, BAC, einem Winkel des andern, DAE, gleich: so sind die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt. Auch sind zwey Triangel ABC, ADE, einander gleich, wenn ein Winkel des einen, BAC, einem Winkel des andern,

DAE, gleich ist, und die solche Winkel einschließenden Seiten umgekehrt proportionirt sind. Fig. 108.

Es sey zuerst △ABC = △ADE. Bringt man CA, AD, in eine gerade Linie: so sind §. 26. auch EA, AB, in einer geraden Linie. Ziehet man nun BD: so ist II. §. 74. △ABC : △BAD = △ADE : △BAD. Nun ist §. 115. △ABC : △BAD = CA : AD, und △ADE : △BAD = EA : AB. Folglich ist II. §. 73. CA : AD = EA : AB.

Es sey zweytens CA : AD = EA : AB. Nun ist §. 115. CA : AD = △ABC : △BAD, und EA : AB = △ADE : △BAD. Folglich ist II. §. 73. △ABC : △BAD = △ADE : △BAD; folglich II. §. 75. △ABC = △ADE.

§. 130.

Sind vier gerade Linien AB, CD, E, F, proportionirt: so ist das Rectangel der äußern Glieder, AB, F, dem Rectangel der mittlern Glieder CD, E, gleich. Auch sind vier gerade Linien AB, CD, E, F, proportionirt, wenn das Rectangel der ersten und letzten AB, F, dem Rectangel der beyden mittlern, CD, E, gleich ist. Fig. 109.

Es sey zuerst AB : CD = E : F. Man errichte §. 20. auf BA, DC, die Perpendikel AG = F, und CH = E, und vollende §. 51. die Parallelogramme BG, DH: so ist §. 128. BG = DH.

Es sey zweytens BG = DH: so ist §. 128. AB : CD = CH : AG = E : F.

§. 131.

Sind drey gerade Linien A, B, C, proportionirt: so ist das Rectangel der äußern Glieder A, C, dem Quadrat des mittelsten Gliedes B gleich. Auch sind

drey

drey gerade Linien A, B, C, proportionirt, wenn das Rectangel der ersten und dritten, A, C, dem Quadrate der zweyten B gleich ist. Fig. 110.

Es sey zuerst A : B = B : C. Nun sey D = B, also A : B = D : C. Folglich ist §. 130. AC = BD = B^q.

Es sey zweytens AC = B^q = BD: so ist §. 130. A : B = D : C, und daher A : B = B : C.

Zusatz. Ein Rectangel wird demnach in ein Quadrat verwandelt, wenn man §. 127. zu den beyden Seiten des Rectangels, A, C, die mittlere Proportionallinie B, sucht.

§. 132.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, eine geradlinichte Figur zu beschreiben, welche einer gegebenen geradlinichten Figur CE, ähnlich sey. Fig. 111.

Macht man §. 35. BAG = DCF; ABG = CDF; BGH = DFE; GBH = FDE: so ist auch §. 46. AGB = CFD, und GHB = FED; auch §. 118. die Seiten proportionirt. Folglich ist §. 114. AH ∾ CE.

§. 133.

Aehnliche Triangel ABC, DEF, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten. Fig. 112.

Es sey §. 125. BC : EF = EF : BG, folglich II. §. 85. BC : BG = BC^q : EF^q. Man ziehe AG. Da △ABC ∾ △DEF: so ist §. 114. ABC = DEF, und AB : BC = DE : EF, folglich AB : DE = BC : EF. Nun war BC : EF = EF : BG. Folglich ist AB : DE = EF : BG, folglich §. 129. △ABG = △DEF, folglich II. §. 74. △ABC : △ABG = △ABC : △DEF. Nun ist §. 115. △ABC : △ABG = BC : BG. Folglich ist auch △ABC : △DEF = BC : BG. Nun war BC : BG = BC^q : EF^q. Folglich ist △ABC : △DEF = BC^q : EF^q.

Zusatz. Hieraus erhellet, wenn drey gerade Linien BC, EF, BG, proportionirt sind; daß alsdenn der Triangel auf der ersten ABC, zu dem ihm ähnlichen Triangel auf der zweyten DEF, sich verhalte, wie die erste BC, zur dritten BG.

§. 134.

Aehnliche Polygone ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche den Polygonen proportionirte Triangel theilen. F. 113.

Man ziehe die Diagonalen BE, EC; GL, LH. Da die Polygone ähnlich: so ist §. 114. BAE = GFL und BA : AE = GF : FL, folglich §. 120. ABE = FGL, und AEB = FLG, folglich §. 118. AB : BE = FG : GL, und AE : EB = FL : LG. Folglich ist §. 114. △ABE ∾ △FGL. Ein gleiches wird von den Triangeln EDC, LKH, bewiesen. Folglich ist auch §. 118. 119. △BEC ∾ △GLH.

Da △ABE ∾ △FGL: so ist §. 133. △ABE : △FGL = BE^q : GL^q. Aus eben dem Grunde ist auch △EBC : △LGH = BE^q : GL^q. Folglich ist △ABE : △FGL = △EBC : △LGH = △CDE : △HKL. Folglich ist II. §. 86. ABCDE : FGHKL = △ABE : △FGL.

Zusatz. Geradlinichte Figuren, welche aus ähnlichen Triangeln in gehöriger Ordnung zusammengesetzt sind, sind einander ähnlich.

§. 135.

Die Perimeter ähnlicher Polygone ABCDE, FGHKL, verhalten sich wie die gleichliegenden Seiten, oder Diagonalen. Fig. 113.

Da die Polygone ähnlich sind, so ist §. 114. AB : FG = BC : GH = CD : HK = DE : KL = EA : LF. Folglich ist II. §. 86. (AB + BC + CD + DE + EA) :

(FG

(FG + GH + HK + KL + LF) = AB : FG ꝛc. = BE : GL ꝛc. (§. 134.)

Zusatz. Da sich dieses auch von den vierseitigen Figuren und von den Triangeln beweisen läßt: so gilt der Satz von allen geradlinichten Figuren.

§. 136.

Aehnliche Polygone ABCDE, FGHKL, verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten oder Diagonalen. Fig. 113.

Da §. 134. ABCDE : FGHKL = △ABE : △FGL und §. 133. △ABE : △FGL = AB^q : FG^q = BE^q : GL^q: so ist auch ABCDE : FGHKL = AB^q : FG^q = BE^q : GL^q ꝛc.

Zusatz. 1. Da dies auch von vierseitigen Figuren erweislich ist, und von Triangeln §. 133. bewiesen worden: so gilt der Satz von allen geradlinichten Figuren.

2. Hieraus erhellet, wenn drey gerade Linien, AB, FG, O, proportionirt sind; daß alsdann die geradlinichte Figur auf der ersten ABCDE, sich zu der ihr ähnlichen auf der zweyten FGHKL, verhalte, wie die erste AB zur dritten O.

§. 137.

Aufgabe: Eine geradlinichte Figur zu beschreiben, welche einer gegebnen ABC, ähnlich, und einer andern D, gleich sey. Fig. 114.

Man beschreibe §. 63. auf BC das Parallelogramm BE = △ABC und §. 64. auf CE, unter dem Winkel CBL, das Parallelogramm CM = D: so ist §. 23. BC mit CF, und LE mit EM in einer geraden Linie. Ferner mache man §. 127. BC : GH = GH : CF, und beschreibe §. 132. auf GH den △KGH ∼ △ABC.

Da

Da $BC : GH = GH : CF$: so ist §. 136. Zus. 2. $\triangle ABC : \triangle KGH = BC : CF$. Nun ist §. 115. $BE : CM = BC : CF$. Folglich ist $\triangle ABC : \triangle KGH = BE : CM$, folglich $\triangle ABC : BE = \triangle KGH : CM$. Nun ist $\triangle ABC = BE$. Folglich ist auch $\triangle KGH = CM = D$.

§. 138.

Sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind auch die auf denselben beschriebnen ähnlichen geradlinichten Figuren KAB, LCD, MF, NH, proportionirt. Auch sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt, wenn die auf denselben beschriebenen ähnlichen Figuren KAB, LCD, MF, NH, proportionirt sind. Fig. 115.

Es sey zuerst $AB : CD = EF : GH$. Nun sey §. 125. $AB : CD = CD : O$, und $EF : GH = GH : P$. Folglich ist II. §. 73. $CD : O = GH : P$. Nun war $AB : CD = EF : GH$. Folglich ist II. §. 81. $AB : O = EF : P$. Nun ist §. 136. Zus. 2. $AB : O = \triangle KAB : \triangle LCD$, und $EF : P = MF : NH$. Folglich ist II. §. 73. $\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH$.

Es sey zweytens $\triangle KAB : \triangle LCD = MF : NH$. Nun ist §. 136. Zus. 2. $\triangle KAB : \triangle LCD = AB^q : CD^q$, und $MF : NH = EF^q : GH^q$. Folglich ist II. §. 73. $AB^q : CD^q = EF^q : GH^q$; folglich II. §. 79. $AB : CD = EF : GH$.

§. 139.

In jedem rechtwinklichten Triangel ABC, ist die Figur auf der Hypothenuse BC, den ihr ähnlichen Figuren auf den Katheten BA, AC, zusammen gleich. Fig. 116.

Es sey AD senkrecht, so ist §. 122. Zus. 1. $CB : BA = BA : BD$, folglich §. 136. Zus. 2. $E : F = CB : BD$. Eben so ist erweislich $E : G = CB : CD$. Folglich ist

II.

II. §. 86. E : (F + G) = CB : (BD + DC). Da nun CB = BD + DC: so ist auch E = F + G.

§. 140.

Zwey rechtwinklichte Parallelogramme AC, CF, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundlinien BC, CG, und Höhen CD, CE. Fig. 117.

Bringt man BC, CG in eine gerade Linie: so ist §. 26. DC mit CE auch in gerader Linie. Man vollende das Rectangel CH. Nun sey willkürlich eine gerade Linie K, und §. 126. BC : CG = K : L, auch DC : CE = L : M, so ist II. §. 84. K : M = K . L : L . M = BC . DC : CG . CE. Nun ist §. 115. AC : CH = BC : CG = K : L, und CH : CF = CD : CE = L : M, und daher II. §. 81. AC : CF = K : M. Folglich ist auch AC : CF = BC . DC : CG . CE.

Zusatz. Da §. 54. jedes schiefwinklichte Parallelogramm einem rechtwinklichten AC, bey gleicher Grundlinie BC, und Höhe CD, gleich ist: so gilt der Satz von allen Parallelogrammen; und, weil §. 49. ein △DBC die Hälfte des Parallelogramms AC, auch von allen Triangeln.

VIII. Proportionen beym Cirkel.

§. 141.

In gleichen Cirkeln sind die Winkel und Ausschnitte, ACB, EDF, den abgeschnittenen Bogen AB, EF, proportionirt. Fig. 118.

Sind AB, EF, commensurabel: so ist ein bestimmter Theil von EF, als EG, etlichemal ohne Rest in AB enthalten. Es sey daher EF = 3 . EG, und AB = 5 . EG. Verbindet man nun die Mittelpunkte der Cirkel mit den Theilpunkten der Bogen mittelst gerader Linien: so sind

§. 90.

§. 90. die daher entstehenden Winkel und Ausschnitte einander gleich, und EDF = 3 . EDG, auch ACB = 5 . EDG. Folglich ist §. 113. ACB : EDF = AB : EF.

Sind AB, EF, incommensurabel: so ist bey jeder Eintheilung von EF, ein Theil EG in AB etlichemal mit einem kleinern Reste enthalten, und EDG in ACB eben so vielmal mit einem kleinern Reste. Folglich ist auch hier §. 113. ACB : EDF = AB : EF.

Zusatz. 1. Hieraus erhellet, daß die Ausschnitte ACB, EDF, sich auch wie die genannten Winkel verhalten.

2. Da die Peripheriewinkel, welche auf den Bogen AB, EF, stehen die Hälften der Centriwinkel ACB, EDF, sind: so verhalten sich auch die Peripheriewinkel in gleichen Cirkeln, wie die Bogen, auf denen sie stehen.

§. 142.

Sind in ungleichen Cirkeln die Winkel ACB, DEF, einander gleich: so sind ihre Bogen AB, DF, den Peripherien der Cirkel proportionirt. Auch sind die Winkel ACB, DEF einander gleich, wenn ihre Bogen AB, DF, den Peripherien der Cirkel proportionirt sind. Fig. 119.

Es sey zuerst ACB = DEF. Errichtet man §. 20. auf AC, DE, die Perpendikel CG, EH: so ist von den Bogen AG, DH, jeder der vierte Theil der Peripherie seines Cirkels. Nun ist §. 141. ACB : ACG = AB : AG, und DEF : DEH = DF : DH, und II. §. 74. ACB : ACG = DEF : DEH. Folglich ist II. §. 73. AB : AG = DF : DH, folglich AB : DF = AG : DH = 4 . AG : 4 DH. (II. §. 79.)

Es sey zweytens AB : DF = 4 AG : 4 DH = AG : DH, folglich AB : AG = DF : DH. Nun ist §. 141.

§. 141. AB : AG = ACB : ACG, und DF : DH = DEF : DEH. Folglich ist II. §. 73. ACB : ACG = DEF : DEH. Nun ist §. 24. ACG = DEH. Folglich ist II. §. 76. ACB = DEF.

§. 143.

Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der um oder in die Polygone beschriebenen Cirkel. Fig. 120.

Man betrachte zuerst die Polygone ABCDE, FGHKL, um welche die Cirkel, deren Durchmesser BM, GN, beschrieben sind; und ziehe AM, BE, FN, GL. Da §. 114. BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL; so ist §. 120. AEB = FLG. Nun ist §. 86. AEB = AMB, und FLG = FNG. Folglich ist I. §. 45. AMB = FNG. Nun ist §. 93. BAM = GFN. Folglich ist §. 118. AB : FG = BM : GN = BR : GS. Nun ist §. 135. ABCDE : FGHKL = AB : FG. Folglich ist ABCDE : FGHKL = BM : GN = BR : GS.

Man betrachte zweytens die Polygone abcde, fghkl, in welche die Cirkel, deren Durchmesser BM, GN, beschrieben sind; und ziehe aR, fS: so siehet man leicht, daß $\triangle aBR \sim \triangle fGS$, und aB : fG = BR : GS = BM : GN, und daß daher abcde : fghkl = BR : GS = BM : GN.

§. 144.

Aehnliche Polygone, verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der um oder in die Polygone beschriebenen Cirkel. Fig. 120.

Da §. 143. bewiesen worden, daß AB : FG = BM : GN = BR : GS, folglich II. §. 79. $AB^q : FG^q = BM^q : GN^q = BR^q : GS^q$; und §. 136. $ABCDE : FGHKL = AB^q : FG^q$; so ist $ABCDE : FGHKL = BM^q : GN^q = BR^q : GS^q$.

Auf

Auf eben die Art wird ein gleiches von abcde, fghkl, bewiesen.

§. 145.

Ist ein reguläres Polygon abcde, um einen Cirkel, und ein ähnliches Polygon ABCDE, in demselben Cirkel beschrieben: so verhalten sich diese Polygone wie die Quadrate der vom Mittelpunkte R, auf die Polygonseiten ab, AB, gefällten Perpendikel RB, RP; ihre Perimeter aber, wie diese Perpendikel. Fig. 120.

Da leicht erweislich △RBa ∾ △RPB: so ist aB : BR = BP : PR. Nun ist leicht erweislich ab = 2 aB, und AB = 2 BP. Folglich ist auch ab : BR = AB : PR, folglich ab : AB = BR : PR. Nun verhalten sich §. 136. die Polygone, wie $ab^q : AB^q$, und §. 135. ihre Perimeter, wie ab : AB. Folglich verhalten sich die Polygone auch wie $RB^q : RP^q$, und ihre Perimeter wie RB : RP.

§. 146.

Wenn in einem Cirkel zwey Sehnen BC, DE, einander schneiden: so sind die Abschnitte der einen, BA, AC, den Abschnitten der andern, DA, AE, umgekehrt proportionirt. Fig. 121.

Ziehet man BE, CD: so ist §. 86. BED = BCD; und EBC = EDC; auch §. 25. BAE = DAC. Folglich ist §. 118. BA : DA = AE : AC.

Zusatz. Schneidet Fig. 121. * der Durchmesser DE eine Sehne BC senkrecht: so ist §. 69. AB = AC; folglich die Proportion AE : AC = AB : AD nunmehr AE : AB = AB : AD, das ist, der Perpendikel auf dem Durchmesser eines Cirkels ist die mittlere Proportionallinie zu den Abschnitten des Durchmessers.

§. 147.

§. 147.

Sind von einem Punkte A außerhalb eines Cirkels zwey gerade Linien AC, AE, gezogen, welche den Cirkel schneiden: so ist die eine AC, nebst ihrem äussern Abschnitte AB, der andern AE, nebst ihrem äussern Abschnitte, AD, umgekehrt proportionirt. Fig. 122.

Ziehet man BE, CD: so ist CAE = CAE, und §. 86. ACD = AEB, und daher §. 46. ADC = ABE. Folglich ist §. 118. AC : AE = AD : AB.

§. 148.

Sind von einem Punkte A außerhalb eines Cirkels zwey gerade Linien AC, AD, gezogen, deren eine AC den Cirkel schneidet, die andre AD ihn berühret: so ist die berührende AD, die mittlere Proportionallinie zu der schneidenden AC, und ihrem äußern Abschnitte AB. Auch ist von zwey geraden Linien AC, AD, die von obgedachten Punkte A nach dem Cirkel gehen, und deren eine AC, den Cirkel schneidet, die andre AD eine Berührungslinie, wenn sie die mittlere Proportionallinie zu der schneidenden AC, und ihrem äussern Abschnitte AB, ist. Fig 123.

Es sey zuerst AD eine Tangente des Cirkels. Man ziehe BD, CD: so ist CAD = CAD, und §. 94. ADB = ACD, und daher §. 46. ABD = ADC. Folglich ist §. 118. AC : AD = AD : AB.

Es sey zweytens AC : AD = AD : AB. Von A ziehe man §. 81. die Tangente AE. Von des Cirkels Mittelpunkt F ziehe man FE, FA, FD: so ist nach Obigen AC : AE = AE : AB, und nach der Voraussetzung AC : AD = AD : AB. Folglich ist AD = AE. Nun ist auch FD = FE, und FA = FA. Folglich ist §. 17. ADF = AEF = R, folglich §. 80. AD eine Tangente.

§. 149.

Aufgabe: Eine gerade Linie AB, so zu schneiden, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionallinie zu der ganzen Linie und dem kleinern Abschnitte werde. Fig. 124.

Man halbire AB in G, errichte in B den Perpendikel BC = AG, mache aus C mit CB einen Cirkel, ziehe AC, und verlängre sie bis D: so ist DE = 2 . CB = AB. Endlich mache man aus A mit AE den Bogen EF, daß AF = AE: so ist AB in F so geschnitten, daß AB : AF = AF : FB.

Da AB senkrecht auf CB, folglich §. 80. eine Tangente des Cirkels ist: so ist §. 148. AE : AB = AB : AD, folglich II. §. 79. AE : AB − AE = AB : AD − AB. Nun ist AE = AF, und AB = DE. Folglich ist AF : AB − AF = AB : AD − DE, das ist, AF : FB = AB : AF, oder AB : AF = AF : FB.

§. 150.

Aufgabe: Einen gleichschenklichten Triangel zu beschreiben, worinn jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze sey. Fig. 125.

Es sey §. 149. eine gerade Linie AB in C so geschnitten, daß BA : AC = AC : CB. Aus A mache man mit AB einen Cirkel, trage §. 98. in denselben BD = AC, und ziehe DA: so ist △ABD nicht nur gleichschenklicht, weil AB = AD, sondern auch ABD = 2 BAD, wie bewiesen werden soll.

Man ziehe DC, und beschreibe §. 102. um den △ACD einen Cirkel. Da BA : AC = AC : CB, und BD = AC: so ist AB : BD = BD : CB, folglich §. 148. BD eine Tangente des Cirkels, folglich §. 94. BAD = CDB,

CDB, folglich I. §. 46. BAD + CDA = ADB. Nun ist §. 27. BAD + CDA = BCD, und §. 15. ADB = ABD. Folglich ist I. §. 45. BCD = ABD, folglich §. 16. BD = DC. Nun war BD = CA. Folglich ist DC = CA, folglich §. 15. 27. BCD = 2 BAD. Nun war BCD = ABD = ADB. Folglich ist auch 2 BAD = ABD = ADB.

§. 151.

Aufgabe. In jeden Cirkel eine reguläre fünfseitige Figur zu beschreiben. Fig. 126.

Es sey der △FGH wie §. 150. Man beschreibe §. 99. in den Cirkel den △ACD mit solchen Winkeln, so daß also jeder Winkel an der Grundlinie CD doppelt so groß, als der Winkel an der Spitze A sey. Man halbire §. 18. jeden Winkel an der Grundlinie CD: so ist CAD = ACE = ECD = ADB = BDC, folglich §. 90. die Bogen dieser Winkel, folglich §. 91. die Sehnen dieser Bogen gleich. Demnach ist ABCDE gleichseitig. Da der Bogen AB dem Bogen DE gleich ist: so ist I. §. 46. ABCD = BCDE, folglich §. 90. AED = BAE. Eben so erweist man dies von den übrigen Winkeln. Demnach ist ABCDE auch gleichwinklicht.

Zusatz. Eben so wie §. 108. 109. 110. bey der regulären sechsseitigen Figur gelehrt worden, wird auch um den Cirkel die reguläre fünfseitige Figur, oder in und um die reguläre fünfseitige Figur ein Cirkel beschrieben.

§. 152.

Aufgabe: Man sucht zwey gerade Linien, deren Differenz AB, gegeben ist, und denen zwey gegebene gerade Linien AC, AD, umgekehrt proportionirt sind. Fig. 127.

Man lasse zwey gerade Linien HK, CD einander unter rechten Winkeln in A schneiden. Von A trage man

auf die eine die gegebene Differenz AB, und auf die andre die gegebenen Linien AC, AD, an entgegengesetzten Seiten. Man halbire AB in E, und CD in F, und errichte die Perpendikel EG, FG, die sich in G schneiden müssen. Aus G ziehe man mit GC = GD einen Cirkel durch C und D: so sind AH, AK, die gesuchten Linien.

Da GE senkrecht aus G: so ist §. 69. HE = EK. Nun ist AE = EB. Folglich ist HA = BK, folglich AB die Differenz von AH, AK, und es ist §. 146. AC : AH = AK : AD.

§. 153.

Aufgabe: Man sucht zwey gerade Linien, deren Summe AB, gegeben ist, und denen zwey gegebene gerade Linien AC, AD, umgekehrt proportionirt sind. Fig. 128.

Es sey ein rechter Winkel BAD. Von A trage man auf den einen Schenkel die gegebene Summe AB, und auf den andern die gegebenen Linien AC, AD, an einerley Seite. Man halbire AB in E, und CD in F, und errichte die Perpendikel, EG, FG, die sich in G schneiden müssen. Aus G ziehe man mit GC = GD einen Cirkel durch C und D: so sind AH, AK, die gesuchten Linien.

Da GE senkrecht auf HK, so ist §. 69. HE = EK. Nun ist AE = EB. Folglich ist AH = KB, folglich AB die Summe von AH, AK; und es ist §. 147. AC : AH = AK : AD.

Zweytes Capitel.

Von den körperlichen Figuren, oder die Stereometrie.

I. Lage der Ebenen.

§. 154.

1. Eine Ebene ist durch Punkte oder Linien gelegt, wenn solche Punkte oder Linien in dieser Ebene sind.

2. Eine gerade Linie ist senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf allen geraden Linien, die man in der Ebene aus dem Durchschnittspunkte ziehet, senkrecht ist.

3. Eine gerade Linie ist geneigt gegen eine Ebene, wenn sie auf derselben nicht senkrecht ist.

4. Zwey Ebenen sind auf einander senkrecht, wenn jeder in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie gefällte Perpendikel auf der andern Ebene senkrecht ist.

5. Ebenen sind geneigt gegen einander, wenn sie nicht senkrecht auf einander sind.

6. Ist eine gerade Linie geneigt gegen eine Ebene, und man ziehet von einem willkürlichen Punkte derselben eine gerade senkrecht auf die Ebene, und verbindet mittelst einer geraden Linie den Durchschnittspunkt der senkrechten mit dem der geneigten: so heißt der spitze Winkel, den mit solcher Verbindungslinie die geneigte Linie macht, ihre Neigung gegen die Ebene.

7. Sind zwey Ebenen geneigt gegen einander, und man errichtet auf der Durchschnittslinie in einerley willkürlichem Punkte in jeder Ebene einen Perpendikel: so heißt der spitze Winkel, den solche Perpendikel einschließen, die Neigung der Ebenen gegen einander.

8. Eine gerade Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie mit der Ebene nie zusammenläuft, so weit man beyde auch verlängert.

9. Zwey Ebenen sind parallel, wenn sie nie zusammentreffen, so weit man auch beyde verlängert.

§. 155.

Jede gerade Linie, von welcher ein Theil in einer Ebene AB, ist ganz in dieser Ebene. Fig. 129.

Gesetzt, es wäre von einer geraden Linie ein Theil CD in der Ebene, und der andere Theil, wie DE, über der Ebene: so könnte man §. 2. Zus. 1. CD in der Ebene nach F verlängern. Demnach hätten zwey gerade Linien CDE, CDF, einen Theil CD mit einander gemein, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

Zusatz. 1. Durch jede gerade Linie läßt sich also eine Ebene legen.

2. Jede gerade Linie schneidet eine Ebene nur in einem Punkte.

§. 156.

Zwey gerade Linien, CD, EF, welche einander schneiden, sind in einer Ebene; auch jeder Triangel GDF, ist in einer Ebene. Fig. 130.

Gesetzt es wäre von dem ΔGDF, ein Stück GHK in der Ebene AB, und das andre HFDK, über solcher Ebene: so wären die geraden Linien GF, GD, nicht ganz in der Ebene AB, welches §. 155. unmöglich ist.

Folg-

Folglich ist der ganze △ GDF in der Ebene AB, in welcher auch GD, GF, folglich §. 155. auch CD, EF, sind.

Zusatz. Durch jede drey Punkte G, F, D, wie auch durch jeden Winkel CGE, läßt sich also eine Ebene legen.

§. 157.

Zwey Ebenen AB, CD, schneiden einander in einer geraden Linie, EF. Fig. 131.

Gesetzt der Durchschnitt der Ebenen, EF, wäre keine gerade Linie: so sey irgend eine andre Linie von E nach F gerade, etwa die EGF in der Ebene CD, und die EHF in der Ebene AB. Diese würden demnach zwey Punkte E und F gemein haben, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 158.

Eine gerade Linie CD, ist auf einer Ebene AB senkrecht, wenn sie auf zwey geraden Linien EF, GH, die man in solcher Ebene durch den Durchschnittspunkt C, ziehet, senkrecht ist. Fig. 132.

Man ziehe in der Ebene AB durch C willkürlich eine dritte Linie KL: so sage ich, daß CD auch auf KL, folglich §. 154. 2. auf der Ebene AB senkrecht ist.

Denn man mache EC = CF, GC = CH, und ziehe EH, GF; DE, DK, DH; DG, DL, DF.

Da EC = CF, HC = CG, und §. 25. ECH = GCF: so ist §. 14. EH = FG, und HEC = CFG.

Da HEC = CFG, und §. 25. ECK = FCL, auch EC = CF: so ist §. 14. EK = FL, und KC = CL.

Da DC senkrecht, folglich DCE = DCF, auch EC = CF, und CD = CD: so ist §. 14. DE = DF; und aus gleichem Grunde DH = DG. Nun war auch EH = FG. Folglich ist §. 17. DEH = DFG.

Da DEH = DFG, DE = DF, EK = FL: so ist §. 14. DK = DL. Nun war auch KC = CL, und CD = CD. Folglich ist §. 14. DCK = DCL, folglich §. 8. CD senkrecht auf KL.

§. 159.

Drey gerade Linien CD, CE, CF, die aus einem Punkte C, gehen, und auf denen eine vierte CG, in solchem Punkte C, senkrecht ist, sind zusammen in einer Ebene. Fig. 133.

Gesetzt, CE, CF, wären in der Ebene AB, aber CD über dieser Ebene: so schnitte §. 157. eine Ebene durch GCD, die Ebene AB in irgend einer geraden Linie CH.

Da CG auf CE, CF, senkrecht: so ist sie §. 158. auch auf CH senkrecht. Nun ist angenommen, daß sie auch auf CD senkrecht. Folglich wäre GCD = GCH, welches unmöglich ist.

§. 160.

Zwey gerade Linien CE, DF, sind parallel, wenn sie beyde auf einer Ebene AB, senkrecht sind. Fig. 134.

In der Ebene AB ziehe man CD, und DG senkrecht auf CD; mache DG = CE, und ziehe CG. Von E ziehe man EG, ED. Da EC senkrecht auf AB: so ist sie §. 154. 2. auf CD, CG, senkrecht. Aus eben dem Grunde ist FD auf DC, DG, senkrecht.

Da EC = DG, CD = CD, und ECD = CDG: so ist §. 14. ED = CG. Nun ist auch EC = DG, und EG = EG. Folglich ist §. 17. ECG = EDG = R. Demnach ist GD auf DC, DE, DF, senkrecht; folglich sind §. 159. diese drey genannten Linien in einer Ebene, in welcher auch §. 156. EC ist. Nun ist ECD + FDC = 2 R. Folglich sind §. 41. EC, DF, parallel.

Zusatz.

Zusatz. Durch zwey Parallellinien EC, DF, läßt sich eine Ebene legen.

§. 161.

Eine gerade Linie, welche zwey Parallelen, EF, GH, schneidet, ist mit den Parallelen in einer Ebene AB. Fig. 135.

Gesetzt die schneidende Linie wäre nicht in AB, sondern drüber wie CKD: so wird §. 157. eine Ebene durch CKD die AB in einer geraden Linie CD schneiden. Demnach hätten zwey gerade Linien zwey Punkte C und D, gemein, welches §. 2. Zus. 4. unmöglich ist.

§. 162.

Ist von zwey Parallellinien EC, DF, die eine EC, auf einer Ebene AB, senkrecht: so ist es auch die andre DF. Fig. 134.

Durch EC, DF, lege man §. 160. Zus. eine Ebene, in welcher §. 161. auch DF, CD.

Da EC senkrecht auf AB: so ist §. 154, 2. ECD = R. Nun sind EC, DF, parallel, folglich §. 44. ECD + FDC = 2 R. Folglich ist FDC = R, und daher FD auf DC senkrecht.

Macht man in der Ebene AB, die DG auf CD senkrecht, EC = DG, und ziehet CG, EG: so ist §. 14. ED = CG, folglich §. 17. ECG = EDG = R, und daher GD auf DE senkrecht. Nun war GD auch auf DC senkrecht, folglich ist §. 158. GD auch auf DF senkrecht, oder FD auf DG. Nun war FD auch auf DC senkrecht. Folglich ist FD §. 158. auf der Ebene AB senkrecht.

§. 163.

Zwey gerade Linien, AB, CD, welche einer dritten EF, in einer andern Ebene parallel, sind selbst parallel. Fig. 136.

In EF nehme man einen willkürlichen Punkt G, und errichte in der Ebene durch AB, EF, den Perpendikel GH, und in der Ebene durch EF, CD, den Perpendikel GK: so ist §. 158. EF auf der Ebene durch HGK senkrecht. Folglich sind §. 162. auch ihre Parallelen AB, CD, auf solcher Ebene senkrecht, folglich §. 160. einander parallel.

§. 164.

Zwey Winkel ABC, DEF, in verschiedenen Ebenen, sind einander gleich, wenn ihre Schenkel parallel sind. Fig. 137.

Man mache BA = ED, BC = EF, und ziehe AD, BE, CF; AC, DF.

Da BA, ED, gleich und parallel: so sind §. 48. auch AD, BE, und aus eben den Gründen CF, BE, folglich §. 163. AD, CF gleich und parallel. Folglich sind §. 48. auch AC, DF, gleich und parallel. Folglich ist §. 17. ABC = DEF.

§. 165.

Aufgabe: Von einem Punkte C, einen Perpendikel auf eine Ebene AB, zu fällen. Fig. 138.

In der Ebene AB, ziehe man willkürlich DE, und fälle in der Ebene durch CDE den Perpendikel CF. Ist dieser senkrecht auf der Ebene: so ist das verlangte geschehen. Ist er es aber nicht: so errichte man in der Ebene AB auf DE den Perpendikel FG, und fälle in der Ebene durch CFG den Perpendikel CG: so ist solcher senkrecht auf AB.

In

In AB ziehe man durch G die HK der DE parallel. Da ED auf FC, FG, folglich §. 158. auf der Ebene CFG senkrecht: so ist §. 162. auch ihre Parallele HK auf solcher Ebene senkrecht, folglich §. 154, 2. auf FG, GC, das ist, CG ist auf GF, GK, folglich §. 158. auf der Ebene AB senkrecht.

§. 166.

Aufgabe: Auf einer Ebene AB, in einem Punkte L, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 138.

Von einem willkürlichen Punkte über der Ebene fälle man §. 165. einen Perpendikel auf die Ebene. Trift dieser den Punkt L wie ML: so ist das verlangte geschehen. Trift er den Punkt L nicht, wie CG: so ziehe man LM der CG parallel: so ist §. 162. LM senkrecht auf AB.

§. 167.

Auf einer Ebene AB, können nicht in einem Punkte C, zwey Perpendikel CD, CE, seyn. Fig. 139.

Gesetzt CD, CE, wären beyde auf AB senkrecht, und man legte durch DCE eine Ebene, welche die AB §. 157. in der geraden Linie FG schnitte: so wären §. 154, 2, CD, CE, auf CG senkrecht, folglich ECG = DCG, welches unmöglich ist.

§. 168.

Schneiden einander zwey Ebenen, AC, AD: so kann eine gerade Linie, EF, nicht auf beyden zugleich senkrecht seyn. Daher sind zwey Ebenen parallel, wenn eine gerade Linie auf beyden zugleich senkrecht ist. Fig. 140.

Gesetzt EF wäre auf beyden Ebenen, die sich in AB schneiden, senkrecht, und man nähme in AB einen willkürlichen Punkt G, und zöge EG, FG: so wäre §. 154, 2. FEG + EFG = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

Ich

Ich sage ferner, daß zwey Ebenen parallel sind, wenn eine gerade Linie auf beyden zugleich senkrecht ist. Denn gesetzt sie wären nicht parallel; so liefen sie zusammen und schnitten einander. Demnach wäre auf zwey Ebenen, die einander schneiden, eine gerade Linie senkrecht, welches nach Obigen unmöglich ist.

§. 169.

Zwey Ebenen, AC, DF, sind parallel, wenn die Schenkel eines Winkels ABC, in der einen Ebene, den Schenkeln eines Winkels DEF, in der andern Ebene, parallel sind. Fig. 141.

Es sey §. 165. BG auf DF senkrecht, und man ziehe GH der DE, und GK der EF parallel.

Da AB der DE, und GH der DE parallel: so sind §. 163. AB, GH parallel, folglich §. 161. ABGH in einer Ebene, und §. 44. ABG = R. Nun ist eben so erweislich, daß CBG = R. Folglich ist §. 158. GB auf AC senkrecht. Nun war GB auch auf DF senkrecht. Folglich sind §. 168. AC, DF, parallel.

§. 170.

Werden zwey parallele Ebenen AB, CD, von einer dritten Ebene EF geschnitten: so sind die Durchschnittslinien EG, FH, parallel. Fig. 142.

Gesetzt EG, FH, wären nicht parallel, sondern träfen verlängert in einem Punkte zusammen: so wäre solcher Punkt in der verlängerten AB, und in der verlängerten CD. Demnach träfen die parallelen Ebenen AB, CD, zusammen, welches unmöglich ist.

§. 171.

Zwey gerade Linien AB, CD, werden von drey parallelen Ebenen HK, LM, NO, in proportionirte Theile geschnitten. Fig. 143.

Man

Man ziehe AD, welche die Ebene LM in G schneidet; desgleichen EG, GF, AC, BD. Da LM, NO, parallel, und von der Ebene BG geschnitten werden: so sind §. 170. EG, BD, parallel. Eben so ist erweislich, daß GF, AC, parallel sind. Folglich ist §. 116. AE : EB = AG : GD, und CF : FD = AG : GD; folglich II. §. 73. AE : EB = CF : FD.

§. 172.

Ist eine gerade Linie CD, auf einer Ebene AB, senkrecht: so ist es auch jede Ebene EF, welche man durch solche Linie legt. Fig. 144.

Da CD senkrecht auf AB, folglich §. 154, 2. auch auf FG: so ist jede Linie wie KL, die man senkrecht auf FG in der Ebene EF, ziehet §. 41. der CD parallel, folglich §. 162. auch auf AB senkrecht. Folglich ist §. 154, 4. EF auf AB senkrecht.

§. 173.

Ist eine Ebene CD, auf einer andern AB, senkrecht; und man fällt von einem beliebigen Punkte F, in der einen Ebene CD, einen Perpendikel auf die andere Ebene AB: so trift solcher die Durchschnittslinie DE. Fig. 145.

Gesetzt es träfe ein solcher Perpendikel nicht die Durchschnittslinie, wie etwa FG: so sey in der Ebene AB, die GH auf DE senkrecht, und FH gezogen. Da CD und AB senkrecht auf einander: so ist §. 154, 4. GH auf CD, folglich §. 154, 2. auch auf HF senkrecht. Nun sollte FG auf AB, folglich auch auf GH senkrecht seyn. Demnach wäre FHG + FGH = 2 R. welches §. 28. unmöglich ist.

§. 174.

Sind zwey Ebenen, CE, DF, welche eiander schneiden, auf einer dritten Ebene AB, senkrecht: so ist es auch ihre Durchschnittslinie CD. Fig. 146.

Gesetzt CD wäre nicht senkrecht auf AB, folglich auch nicht auf CF, CG: so sey in der Ebene CE, die CH auf CG, und in der Ebene DF, die CK auf CF senkrecht. Nun sind die Ebenen CE, DF, auf der Ebene AB senkrecht. Folglich sind §. 154, 4. auch CH, CK, auf AB senkrecht, welches §. 167. unmöglich ist.

II. Prismatische Körper.

§. 175.

1. Ein Prisma ist ein Körper, welcher von ebenen geradlinichten Figuren begrenzt wird, unter denen zwey einander entgegengesetzte gleich und ähnlich und parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind. Erstere heißen seine Grundflächen, letztere seine Seitenflächen. So viel Seiten die Grundfläche hat, so viel Seitenflächen hat das Prisma, und heißt daher nach der Anzahl der Seitenflächen, dreyseitig, vierseitig, vielseitig. Die geraden Linien, worinn jede zwey Seitenflächen einander schneiden, heißen die Seitenlinien des Prisma. Die Höhe des Prisma ist der Abstand der einen Grundfläche von der andern. Legt man durch zwey gleichliegende Diagonalen der Grundflächen eine Ebene; so heißt solche eine Diagonalebene des Prisma.

2. Ein Prisma heißt gerade oder schief, je nachdem die Seitenlinien, und daher auch die Seitenflächen, auf den Grundflächen senkrecht sind, oder nicht. Daher sind die Seitenflächen eines geraden Prisma Rectangel.

3. Ein

3. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped, worinn also jede zwey entgegengesetzte Seitenflächen auch, wie die Grundflächen, parallel sind. Ein gerades Parallelepiped, dessen Grundflächen Rectangel sind, heißt rechtwinklicht. Ein rechtwinklichtes Parallelepiped, welches von sechs Quadraten begrenzt wird, heißt ein **Würfel**, oder **Cubus**.

4. Ein **körperlicher Winkel**, oder eine **Ecke**, ist die Neigung, wenigstens dreyer geraden Linien gegen einander, welche in einem Punkte zusammentreffen, aber nicht in ein und derselben Ebene liegen. Ein körperlicher Winkel wird daher von wenigstens drey ebenen Winkeln eingeschlossen, deren Spitzen und Schenkel zusammentreffen. Körperliche Winkel sind gleich, wenn sie von gleich vielen gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen werden.

5. **Aehnliche Körper** sind solche, die von gleich vielen ähnlichen Ebenen begrenzt werden.

6. **Congruente Körper** sind solche, die in einander passen, oder deren Grenzen sich decken. Solche Körper sind gleich und ähnlich, oder werden von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begrenzt. Doch können Körper gleich seyn, ohne daß sie zugleich ähnlich sind.

§. 176.

Von drey ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche einen körperlichen Winkel, A, einschließen, sind jede zwey zusammen größer, als der dritte. Fig. 147.

Sind die drey ebenen Winkel einander gleich: so ist der Satz für sich klar; sind sie aber ungleich: so sey etwa

BAC

BAC größer, und §. 35. BAE = BAD, auch §. 13. AE = AD. Man ziehe BEC, CD, DB.

Da AD = AE, BA = BA, und BAD = BAE: so ist §. 14. DB = BE. Nun ist §. 32. DB + DC > BE + EC. Folglich ist DC > EC, folglich §. 36. DAC > CAE. Nun war BAD = BAE. Folglich ist BAD + DAC > BAE + CAE, das ist, BAD + DAC > BAC.

§. 177.

Die ebenen Winkel DAB, BAC, CAD, welche einen körperlichen Winkel A, einschließen, sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel. Fig. 148.

Ziehet man DB, BC, CD: so entstehen noch drey körperliche Winkel, D, B, C, deren jeder von drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist. Folglich ist §. 176. CBA + ABD > DBC; BDA + ADC > CDB: DCA + ACB > DCB. Nun sind §. 46. die drey letztgenannten Winkel zusammen zwey rechten Winkeln gleich. Folglich sind die sechs erstgenannten Winkel zusammen größer als zwey rechte Winkel. Nun sind §. 46. die Winkel DAB, BAC, CAD, nebst den sechs erstgenannten Winkeln zusammen sechs rechten Winkeln gleich. Folglich ist DAB + BAC + CAD < 4 R.

Zusatz. Auf ähnliche Art würde der Beweiß geführt, wenn der körperliche Winkel A, von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen würde. Folglich gilt der Satz allgemein von jedem körperlichen Winkel.

§. 178.

Aufgabe: Aus drey ebenen Winkeln ABC, DEF, GHK, welche zusammen kleiner als vier rechte Winkel, und deren jede zwey zusammen größer als der dritte sind, einen körperlichen Winkel zu machen. Fig. 149. 150. 151.

Erster

Erster Theil.

Man mache alle Schenkel der gegebenen Winkel einander gleich, und ziehe AC, DF, GK: so läßt sich §. 37. * aus solchen Linien ein Triangel machen. Es sey dies §. 34. der $\triangle LMN$, so daß $NL = AC$; $LM = DF$; $MN = GK$ sey. Man beschreibe §. 102. um den $\triangle LMN$ einen Cirkel, und ziehe von dessen Mittelpunkte O, die gerade Linie ON: so ist zu beweisen, daß $AB > ON$ sey; der Mittelpunkt O mag nun in, oder über, oder unter LM fallen.

1) Er sey in LM. Fig. 149. Wäre nun $AB = ON$, oder $AB < ON$; so wäre, weil $AB = DE = EF$, und $ON = OL = OM$, im ersten Falle $DE + EF = LM$, im zweyten Falle $DE + EF < LM$, welches beydes, weil $LM = DF$, §. 32. unmöglich ist. Folglich muß $AB > ON$ seyn.

2) Er sey über LM, Fig. 150. und OL, OM gezogen. Wäre nun $AB = ON$, folglich $BC = OL$, auch $AC = LN$: so wäre §. 17. $ABC = NOL$. Nun wäre eben so erweislich, $DEF = LOM$, und $GHK = MON$. Folglich wäre $ABC + DEF + GHK = NOL + LOM + MON = 4$ R. (§. 25.) welches nach dem Angenommenen unmöglich ist. Wäre hingegen $AB < ON$: so sey $OP = AB$ und $OQ = BC$, folglich $PN = QL$; folglich §. 116. PQ, NL, parallel; folglich §. 116. $ON : OP = NL : PQ$. Nun ist $ON > OP$, folglich $NL > PQ$. Nun ist $NL = AC$. Folglich wäre $AC > PQ$. Folglich wäre §. 37. $ABC > NOL$. Nun wäre eben so erweislich $DEF > LOM$ und $GHK > MON$. Folglich wäre $ABC + DEF + GHK > NOL + LOM + MON$, folglich §. 25. > 4 R. welches nach dem Angenommenen unmöglich ist. Demnach muß $AB > ON$ seyn.

3) Er sey unter LM Fig. 151. und OL, OM, gezogen. Wäre nun AB = ON: so wäre wie beym zweyten Falle ABC + DEF + GHK = NOL + LOM + MON = 4 R. gegen das Angenommene. Wäre hingegen AB < ON so sey wiederum OP = OQ = OR = AB, folglich wiederum PQ der LM, PR der MN parallel, und daher QPR = LNM, auch ABC > LON, und GHK > NOM, folglich ABC + GHK > LOM: alles wie beym zweyten Falle. Es sey daher NOS = ABC, und NOT = GHK, folglich SOT = ABC + GHK, auch OS = OT = AB, und PS, PT, TS gezogen: so ist §. 14. PS = AC = NL, und PT = GK = NM. Nun ist offenbar LNM = QPR > SPT. Folglich ist §. 36. DF = LM > ST, folglich §. 37. DEF > SOT. Nun war SOT = ABC + GHK. Folglich wäre DEF > ABC + GHK, gegen das Angenommene. Demnach muß AB > ON seyn.

Zweyter Theil.

Da also in allen Fällen AB > ON: so sey §. 98. * eine gerade Linie cd so, daß $AB^q = ON^q + cd^q$, und §. 166. OV auf den Cirkelebenen Fig. 149. 150. 151. senkrecht, auch OV = cd, folglich $AB^q = ON^q + OV^q$. Man ziehe VL, VM, VN: so ist V der verlangte körperliche Winkel.

Da OV senkrecht auf der Ebene, folglich auch auf OL, OM, ON: so ist VOL = VON. Nun ist auch OL = ON, und OV = OV. Folglich ist §. 14. VL = VN. Nun ist aus eben den Gründen VM = VN. Folglich ist VL = VM = VN.

Da VON ein rechter Winkel: so ist $VN^q = ON^q + OV^q$. Nun ist auch $AB^q = ON^q + OV^q$. Folglich ist $VN^q = AB^q$, folglich VN = AB. Nun war VN = VM = VL, und AB = BC = DE = DF = GH = HK. Auch war LN = AC, LM = DF, MN =

GK

GK. Folglich ist §. 17. LVN = ABC, LVM = DEF, MVN = GHK. Demnach bestehet der körperliche Winkel V aus den gegebenen ebenen Winkeln. (§. 175, 4.)

§. 179.

Sind von den Ebenen, welche einen Körper begrenzen, jede zwey entgegengesetzte einander parallel: so sind solche Ebenen Parallelogramme, und immer die entgegengesetzten einander gleich. Fig. 152.

Da die Parallelebenen BG, CE, und die Parallelebenen BF, AE, von einer dritten Ebene AC geschnitten werden: so sind §. 170. die Durchschnittslinien AB, CD, und AD, CB, parallel, folglich AC ein Parallelogramm. Eben so ist dieses von allen übrigen Ebenen erweislich.

Ziehet man in zwey entgegengesetzten Ebenen die Diagonalen AH, DF: so ist §. 49. Zus. 1. BG = 2 △ABH, und CE = 2 △DCF. Nun sind AB, CD; BH, CF, parallel und gleich, und daher §. 164. 14. △ABH = △DCF. Folglich ist BG = CE. Eben so ist dieses von allen übrigen entgegengesetzten Ebenen erweislich.

Zusatz. Jedes Prisma, welches ein Parallelogramm CE zur Grundfläche hat, das hat auch parallele Seitenflächen. Denn da AB der GH, und BC der HF parallel ist: so ist §. 169. BD, HE, und aus eben den Gründen AE, BF, parallel. Daher heißt ein solches Prisma ein Parallelepiped.

§. 180.

Wird ein Parallelepiped ABCD, von einer Ebene EF, den Seitenflächen AB, CD, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Theile AF, ED, wie ihre Grundflächen AH, EK. Fig. 153.

Sind erstlich, AE, EC, commensurabel: so wird ein Theil von EC, wie EL in AE aufgehen. Es sey daher EC = 2 EL, und AE = 3 EL. Legt man durch die

Theilpunkte Linien mit AG, CK parallel: so entstehen gleiche Parallelogramme als HL; und, wenn man durch solche Linien Ebenen mit AB, CD, parallel legt, auch gleiche Parallelepipede, als FL, wie leicht erweislich ist. Demnach ist auch EK = 2 HL, und AH = 3 HL, auch ED = 2 FL, und AF = 3 FL. Folglich ist §. 113. AF : ED = AH : EK.

Sind zweytens AE, EC, incommensurabel: so wird bey jeder Theilung der EC, ein Theil, wie EL, etlichemal in AE, mit einem kleinern Reste, und daher HL in AH, und FL in AF, eben so vielmal mit einem kleinern Reste enthalten seyn. Folglich ist auch alsdann §. 113. AF : ED = AH : EK.

§. 181.

Aufgabe: An einer geraden Linie AB, einen körperlichen Winkel zu beschreiben, welcher einem gegebenen D gleich sey. Fig. 154.

Der gegebene körperliche Winkel D, sey von den ebenen Winkeln EDC, CDF, FDE, eingeschlossen, so daß DF über der Ebene EDC sey. In DF nehme man einen beliebigen Punkt F, fälle §. 166. von demselben den Perpendikel FG auf die Ebene EDC, und ziehe in solcher Ebene DG. Hierauf mache man BAH = EDC, und BAK = EDG, folglich HAK = CDG. Nun sey AK = DG, und §. 167. KL senkrecht auf der Ebene BAH, auch KL = GF, und AL gezogen: so ist der körperliche Winkel A = D.

Man mache AB = DE, AH = DC, und ziehe CG, EG, CF, EF; HK, BK, HL, BL.

Da BA = ED, AK = DG, und BAK = EDG: so ist §. 14. BK = EG. Nun war auch KL = GF, und §. 154. 2. BKL = EGF. Folglich ist §. 14. BL = EF. Da ferner AK = DG, KL = GF, und §. 154, 2. AKL = DGF:

= DGF: so ist §. 14. LA = FD. Da endlich KA = GD, AH = DC, und KAH = GDC: so ist §. 14. HK = CG. Nun war auch KL = GF und §. 154, 2. HKL = CGF. Folglich ist §. 14. HL = CF.

Da AB = DE gemacht, und bewiesen BL = EF, LA = FD: so ist §. 17. BAL = EDF. Da HA = CD gegemacht, und bewiesen LA = FD, HL = CF: so ist §. 17. LAH = FDC. Nun ist auch BAH = EDC gemacht. Folglich ist §. 175, 4. der körperliche Winkel A = D.

§. 182.

Aufgabe: Auf einer geraden Linie AB, ein Parallelepiped zu beschreiben, welches einem gegebenen CD, ähnlich sey. Fig. 155.

Man beschreibe §. 181. an AB einen körperlichen Winkel A = C, so daß BAK = ECG, KAH = GCF, HAB = FCE. Man mache §. 126. EC : CG = BA : AK, und CG : CF = AK : AH; folglich II. §. 81. EC : CF = BA : AH, und vollende das Parallelogramm BK, und das Parallelepiped AL: so ist §. 114. BK ∾ EG, KH ∾ GF, HB ∾ FE; folglich §. 179. auch die entgegengesetzten Ebenen einander ähnlich, folglich §. 175, 5. AL ∾ CD.

§. 183.

Jedes Parallelepiped DH, wird von der Diagonalebene ADFH, halbirt. Fig. 152.

Da §. 49. Zus. 1. △ABH = △AHG, und △DCF = △EFD, auch §. 179. CA = FG, und ADFH = ADFH: so ist §. 175, 6. Prisma ABHFDC = AGHFED.

Zusatz. 1. Ein dreyseitiges Prisma ist daher die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Höhe und gedoppelter Grundfläche.

2. Wird das Parallelepiped DH, durch zwey entgegengesetzte Seitenflächen BD, HE, von einer Diagonalebene geschnitten: so sind die daher entstehende Prismata auch einander gleich, und daher jedes die Hälfte des Parallelepipeds DH. Folglich ist das Prisma ADCFEG = AGHFED, wovon jenes CE, dieses △FED zur Grundfläche hat, so daß CE = 2 △FED, und beyder Höhe gleich ist.

§. 184.

Parallelepipede ABHF, ABKG, von gleicher Höhe, und auf ein und derselben Grundfläche AB, sind einander gleich. Fig. 156. 157. 159.

Erstlich mögen Fig. 156. die Seitenlinien beyder Körper in einerley geraden Linien FM, DK, sich endigen.

Da §. 49. DH = CB, und EK = CB: so ist DH = EK, folglich DE = HK, folglich §. 54. FE = LK, und §. 56. △DCE = △HBK. Eben so ist erweislich △FAG = △LMN. Nun ist auch §. 179. AD = NH und AE = NK. Folglich ist §. 175, 6. Prisma AFGEDC = NLMKHB. Setzt man zu beyden den Körper ABHG hinzu: so ist ABHF = ABKG.

Zweytens mögen Fig. 157. die Seitenlinien beyder Körper in einerley geraden Linien FE, LK, sich endigen.

Hier ist eben so erweislich FG = DE, folglich FM = DK, und △AFG = △CDE; auch △LMN = △BHK; ferner AL = CH, und AM = CK; folglich Prisma AFGDEC = LMNHKB. Setzt man nun zu beyden den Körper ABHG: so ist wiederum ABHF = ABKG.

Drittens mögen Fig. 159. die Seitenlinien beyder Körper in verschiedenen geraden Linien FL, DH; GM, EK, sich endigen.

Man

Man verlängere MG nach R, LH nach Q, KE nach O, FD nach O, und ziehe AR, CO, NP, BQ: so ist nach dem ersten Falle ABQR = ABKG, und nach dem zweyten Falle ABQR = ABHF. Folglich ist wiederum ABHF = ABKG.

Zusatz. Jedes schiefe Parallelepiped ABKG läßt sich in ein gerades verwandeln, wenn man auf einer der beyden Grundflächen Seitenlinien perpendiculär errichtet, und solche bis zur andern Grundfläche verlängert.

§. 185.

Parallelepipede von gleicher Höhe und auf gleichen Grundflächen sind einander gleich. Fig. 158.

Die beyden Parallelepipede sind entweder gerade oder schief. Da man §. 184. Zus. letztre in erstere verwandeln kann: so gilt der Satz, wenn er von den geraden bewiesen ist, auch von den schiefen. Sind beyde Parallelepipede gerade: so haben ihre gleichen Grundflächen entweder einerley Winkel, oder nicht.

Sind zuerst die gleichen Grundflächen AB, CD, der beyden gleichhohen geraden Parallelepipede, gleichwinklicht, so bringe man diese Grundflächen so an einander, daß AED, desgleichen BEC in gerader Linie sind, weil AEB = CED ist. Vollendet man die Parallelogramme AC, BD, und die Parallelepipede auf diesen Grundflächen, und ziehet FEH: so ist solche die Diagonale des Parallelogramms GK, so daß die Diagonalebene durch FH das Parallelepiped auf GK halbirt, und daher die Körper auf FKH und FGH gleich sind. Aus eben den Gründen sind die Körper auf FCE, und FAE, nicht weniger die Körper auf EDH, und EBH, gleich. Nimmt man solche von den gleichen Körpern auf FKH und FGH hinweg: so sind die übriggebliebenen Körper auf CD und AB gleich.

Sind zweytens solche Grundflächen nicht gleichwinklicht, wie AB, LD: so verwandle man LD in CD, und es ist leicht erweislich, daß das Prisma auf ECL, dem auf KDM, gleich sey; folglich, wenn man beyden den Körper auf LEDK, beyfügt, das Parallelepiped auf LD, dem auf CD, folglich auch dem auf AB, gleich seyn müsse.

§. 186.

Parallelepipede, AB, CD, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen AE, CF. Fig. 160.

Auf GF beschreibe man §. 63. FH = AE, und vollende das Parallelepiped GK: so ist §. 185. GK = AB. Nun ist §. 180. GK : CD = FH : CF. Folglich ist AB : CD = AE : CF.

Zusatz. 1. Haben zwey Parallelepipede GK, CD, gleiche Grundflächen, KH, DG: so verhalten sie sich wie ihre Höhen, HG, GC. Denn es ist nach Obigem GK : CD = HF : CF und §. 115. HF : CF = HG : GC. Folglich ist GK : CD = HG : GC.

2. Da ein dreyseitiges Prisma die Hälfte eines Parallelepipeds ist: so gilt der Satz auch von dreyseitigen prismatischen Körpern.

§. 187.

Jede prismatische Körper von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen. Fig. 161.

Es sey die Grundfläche eines vielseitigen Prisma ABCDE, eines andern von gleicher Höhe FGHKL. Man theile beyde durch Diagonalen in Triangel; und nenne die dreyseitigen Prismata über solchen Triangeln, M, N, O; P, Q, R. Da §. 186. Zus. 2. M : N = ABC : ACD; so ist II. §. 79. M + N : N = ABCD : ACD. Nun ist auch

N : O = ACD : ADE. Folglich ist II. §. 81. M + N : O = ABCD : ADE, folglich II. §. 79. M + N + O : O = ABCDE : ADE. Nun ist auch O : R = ADE : FKL. Folglich ist II. §. 81. M + N + O : R = ABCDE : FKL. Nun ist eben so erweislich P + Q + R : R = FGHKL : FKL. Folglich ist II. §. 81. M + N + O : P + Q + R = ABCDE : FGHKL.

Zusatz. Prismatische Körper von gleichen Grundflächen, verhalten sich wie ihre Höhen.

§. 188.

Parallelepipede AB, CD, sind in zusammengesetzter Verhältniß ihrer Grundflächen AE, CF, und Höhen EB, FD. Fig. 162.

Man mache FG = AE, und vollende das Parallelepiped DG: so ist §. 186. Zus. 1. AB : DG = BE : DF, und §. 186. DG : CD = FG : CF = AE : CF. Folglich ist II. §. 83. AB : CD = BE . AE : DF . CF.

Zusatz. Auf eben die Art beweist man ein Gleiches von jeden prismatischen Körpern.

§. 189.

Aehnliche Parallelepipede AB, CD, sind in cubischer Verhältniß ihrer gleichliegenden Seiten, AE, CF. Fig. 163.

Man verlängre AE, GE, HE, bis ET = CF, EK = FM, EL = FQ ist; und vollende das Parallelogramm KT, und die Körper OT, KP; desgleichen das Parallelogramm GT, und den Körper EN.

Da CD ∼ AB: so ist MFC = GEA = KET. Nun ist CF = ET; FM = EK; und daher CF : FM =

$ET : EK$. Folglich ist $CM \cong TK$. Nun ist eben so erweislich $CQ \cong LT$, und $DF \cong EO$. Folglich $CD \cong OT \sim AB$, folglich $AE : ET = GE : EK = HE : EL$. Nun ist §. 115. 186. $AE : ET = AG : GT = AB : EN$; und $GE : EK = GT : TK = EN : KP$; desgleichen $HE : EL = HT : TL = KP : OT$. Folglich ist $AB : EN = EN : KP = KP : OT$, folglich II. §. 85. $AB : OT = (AB : EN)^3 = AE^c : ET^c$. Nun war $OT = CD$, und $ET = CF$. Folglich ist $AB : CD = AE^c : CF^c$.

Zusatz. 1. Sind vier gerade Linien a, b, c, d, proportionirt: so sind die auf denselben beschriebenen ähnlichen Parallelepipede A, B, C, D, gleichfalls proportionirt; und umgekehrt; weil $A : B = a^c : b^c$, und $C : D = c^c : d^c$.

2. Sind vier gerade Linien a, b, c, d, stetig proportionirt, und es sind auf der ersten a, und zweyten b, ähnliche Parallelepipede A, B: so ist $A : B = a : d$; weil $A : B = a^c : b^c$ und $a : d = a^c : b^c$.

3. Diese Sätze gelten auch von ähnlichen dreyseitigen prismatischen Körpern, als den Hälften der Parallelepipeden; und daher auch von den vielseitigen.

III. Körper, die nicht prismatisch sind.

§. 190.

1. Ein Cylinder ist ein Körper, welcher von zwey gleichen und parallelen Cirkelflächen, deren Mittelpunkte eine gerade Linie, welche die Axe heißt, verbindet, als von seinen Grundflächen, und von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, welche um die Peripherien beyder Grundflächen gelegt, und so beschaffen ist, daß jede gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte der Peripherie einer der beyden

Grund-

Grundflächen der Axe parallel ziehet, ganz in diese Oberfläche fällt.

2. Die Höhe eines Cylinders ist der Abstand der beyden Grundflächen von einander.

3. Cylinder sind ähnlich, wenn ihre Axen den Durchmessern oder Halbmessern ihrer Grundflächen proportionirt sind.

4. Der Cylinder heißt gerade, oder schief, je nachdem die Axe den Grundflächen senkrecht, oder nicht senkrecht ist.

Zusatz. 1. Ein Cylinder wird von einer Cirkelfläche beschrieben, welche sich an einer geraden Linie so herabbewegt, daß sie sich immer parallel bleibt.

2. Ein gerader Cylinder wird von einem Rectangel beschrieben, welches sich rings um seine unverrückte Seite drehet. Die Axe ist die unverrückte Seite, um welche sich das Rectangel drehet. Die Oberfläche ist die krumme Fläche, welche die der Axe entgegengesetzte Seite beschreibt. Die Grundflächen sind die Cirkel, welche von den übrigen Seiten des Rectangels beschrieben werden. Die Höhe ist die Axe selbst.

§. 191.

Wird ein Cylinder AB, von einer Ebene EF, der Grundfläche parallel geschnitten: so ist jeder solcher Schnitt ein der Grundfläche gleicher Cirkel, und sein Mittelpunkt G, in der Axe CD. Fig. 164.

Es werde der Durchschnitt EF, von der Axe in G getroffen. Auch trift die AH, welche der CD parallel ist, den Umfang des Durchschnitts in E. Ferner ist §. 170.

GE

GE der CA parallel, folglich §. 49. GE = CA. Eben so beweist man, daß GK = CL. Nun ist die Grundfläche ein Cirkel, und daher CA = CL. Folglich ist ist GK = CA = GE. Nun gilt dies von allen Linien wie GK, GE. Folglich ist der Durchschnitt ein Cirkel, dessen Mittelpunkt G, und dessen Halbmesser GE = CA. Folglich ist der Durchschnitt der Grundfläche gleich.

Zusatz. Ein Durchschnitt durch die Axe CD, giebt ein Parallelogramm ANBH, und zwar ein Rectangel beym geraden Kegel.

§. 192.

Eine **Pyramide** ist ein Körper, der von ebenen geradlinichten Figuren begrenzt wird, welche außer einer, der Grundfläche, Triangel seyn müssen, die in einem Punkte, welcher außer der Grundfläche liegt, zusammentreffen, und Seitenflächen heißen. So viel Seiten die Grundfläche hat, so viel Seitenflächen hat die Pyramide, und heißt daher nach der Anzahl der Seitenflächen, dreyseitig, vierseitig, vielseitig. Die geraden Linien, worinn jede zwey Seitenflächen einander schneiden, heißen die Seitenlinien der Pyramide. Ihre Spitze ist der Punkt, worinn die Seitenflächen zusammentreffen. Ihre Höhe ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche.

Zusatz. Nimmt man außerhalb einer ebenen geradlinichten Figur willkürlich einen Punkt an, ziehet von solchem gerade Linien nach den Winkelspitzen der Figur, und legt durch diese Linien Ebenen: so entsteht eine Pyramide.

§. 193.

§. 193.

Wird eine Pyramide ABE, mittelst einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten: so ist der Durchschnitt GK, der Grundfläche BE, ähnlich. Fig. 165.

Da §. 170. GL der BF, und GH der BC parallel: so ist §. 164. HGL = CBF, und §. 116. AG : AB = GL : BF = GH : BC. Nun wird solches auf eben die Art von den übrigen Winkeln und Seiten bewiesen. Folglich ist §. 114. GK ~ BE.

Zusatz. 1. Demnach ist §. 136. Zus. GK : BE = $GL^q : BF^q = AG^q : AB^q$.

2. Ist AN senkrecht auf BE, folglich auch auf GK, und man ziehet GM, BN: so ist AMG = ANB, folglich GM der GN parallel, und daher AM : AN = AG : AB. Folglich ist auch GK : BE = $AM^q : AN^q$, das ist, die Durchschnitte sind in quadratischer Verhältniß ihrer Entfernungen von der Spitze.

§. 194.

Ein Kegel ist ein Körper, welcher von einer Cirkelfläche, als Grundfläche, und von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, welche von einem Punkte außerhalb der Grundfläche, als der Spitze, um die Peripherie der Grundfläche gelegt, und so beschaffen ist, daß jede gerade Linie von der Spitze nach der Peripherie der Grundfläche ganz in diese Oberfläche fällt. Diese gerade Linie heißt die Seite des Kegels. Seine Axe ist eine gerade Linie von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche. Seine Höhe ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche. Ein gerader Kegel heißt, dessen Axe auf der Grundfläche senkrecht ist; ein schiefer Kegel, dessen Axe auf der Grund-

fläche

fläche nicht senkrecht ist. Jeder Schnitt durch die Axe ist ein Triangel. Kegel sind ähnlich, wenn ihre Axen den Durchmessern der Grundflächen proportionirt sind.

Zusatz. Ein gerader Kegel wird von einem rechtwinklichten Triangel beschrieben, wenn sich solcher rings um seinen unverrückten Perpendikel drehet. Dieser unverrückte Perpendikel ist die Axe und Höhe des Kegels. Die Grundfläche ist der Cirkel, der von dem andern bewegten Perpendikel beschrieben wird. Die Seite ist die Hypothenuse des bewegten Triangels. Jeder Schnitt durch die Axe des geraden Kegels ist ein gleichschenklichter Triangel. Je nachdem die Schenkel dieses Triangels einen rechten, oder stumpfen, oder spitzen Winkel einschließen, heißt der Kegel, **rechtwinklicht**, oder **stumpfwinklicht**, oder **spitzwinklicht**.

§. 195.

Wird ein Kegel ABD, mittelst einer Ebene der Grundfläche parallel geschnitten: so ist der Durchschnitt FK, ein Cirkel, dessen Mittelpunkt G, in der Axe AC, liegt. Fig. 166.

Schneidet man den Kegel durch die Axe AC: so ist jeder Durchschnitt wie GF, der CB parallel, folglich $AC : CB = AG : GF$. Eben so ist $AC : CE = AG : GH$, oder weil $CE = CB$, $AC : CB = AG : GH$. Folglich ist $GF = GH$. Nun wird dieses von allen andern Durchschnitten wie von GF, GH bewiesen. Folglich ist FK ein Cirkel, und G dessen Mittelpunkt.

Zusatz. Demnach ist $FK : BD = GF^q : CB^q = AG^q : AC^q = AM^q : AN^q$, das ist, die Durchschnitte sind in quadratischer Verhältniß der Entfernungen von der

der Spitze, wo AL senkrecht auf BD, und daher auch auf FK ist.

§. 196.

Eine Kugel, Sphäre, wird von einem halben Cirkel beschrieben, wenn derselbe rings um seinen unverrückten Durchmesser gedrehet wird. Die Axe der Kugel ist dieser unverrückte Durchmesser, und der Mittelpunkt der Kugel der Mittelpunkt des bewegten halben Cirkels. Die Kugelfläche ist die krumme Oberfläche, welche die Peripherie des halben Cirkels beschreibt. Der Durchmesser der Kugel ist jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt gehet, und an beyden Seiten von der Kugelfläche begrenzt wird. Alle Durchmesser und Halbmesser einer Kugel sind einander gleich. Kugeln sind einander gleich, deren Durchmesser oder Halbmesser gleich sind. Wird die Kugel von einer Ebene durch den Mittelpunkt geschnitten: so ist der Durchschnitt ein Cirkel, welcher mit der Kugel einerley Mittelpunkt und Durchmesser hat. Daher sind alle Durchschnitte durch den Mittelpunkt gleich große Cirkel. Jede Ebene durch den Mittelpunkt halbirt die Kugel.

§. 197.

Jeder Kugelschnitt AB, ist ein Cirkel, dessen Mittelpunkt D, von dem aus dem Kugelmittelpunkte C, gefällten Perpendikel, CD, getroffen wird. Fig. 167.

Da der Schnitt AB, innerhalb der Kugel: so muß jede Linie aus dem Mittelpunkte nach dem Schnitte, folglich noch mehr der Perpendikel CD, kleiner als der Halbmesser CA seyn. Ziehet man nun DA: so ist $DA^q = CA^q - CD^q$. Nun wird eben dies von allen Linien bewiesen, die man wie DA, von D nach dem Umfange des Schnitts

Schnitts ziehet. Folglich ist der Schnitt ein Cirkel, und D sein Mittelpunkt.

§. 198.

In gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte sind alle Kugelschnitte einander gleich; in ungleichen Entfernungen aber ist der dem Mittelpunkte nähere grösser, als der entferntere, und der durch den Mittelpunkt der größeste. Fig. 167.

Sind CD, CE, die Entfernungen zweyer Kugelschnitte AB, FG; folglich Perpendikel; so ist $DA^q = CA^q - CD^q$, und $EF^q = CF^q - CE^q$. Nun ist $CA^q = CF^q$. Folglich ist $DA^q = EF^q$, wenn $CD = CE$; und $DA^q > EF^q$, wenn $CD < CE$ ist. Demnach muß der Schnitt durch den Mittelpunkt der größeste Cirkel seyn.

Zusatz. 1. Zwey gleiche Kugelschnitte AB, FG, haben gleiche Entfernungen CD, CE.

2. Von zwey ungleichen Kugelschnitten AB, FG, ist die Entfernung des größern, CD, kleiner, als des kleinern CE.

3. Ist ein Kugelschnitt ein größter Cirkel: so geht er durch den Mittelpunkt der Kugel, weil es sonst noch einen größern Cirkel geben müßte.

4. Eine gerade Linie CD von dem Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte des Schnitts AB, ist senkrecht auf dem Schnitte, weil sonst ein Perpendikel aus dem Mittelpunkte der Kugel den Mittelpunkt des Schnitts nicht träfe, welches §. 197. unmöglich ist.

5. Eine gerade Linie, welche man auf einem Kugelschnitte AB, in seinem Mittelpunkt D, senkrecht errichtet, gehet durch den Mittelpunkt der Kugel C, weil sonst noch ein Perpendikel in D stünde, welches §. 167. unmöglich ist.

§. 199.

§. 199.

Ein Durchmesser der Kugel, welcher auf einem Kugelschnitte senkrecht ist, und daher durch des Schnitts Mittelpunkt gehet, heißt die zu solchem Kugelschnitte gehörige Axe, und ist §. 168. auf allen übrigen mit jenem parallelen Schnitten senkrecht, gehet folglich §. 197. durch die Mittelpunkte aller dieser Parallelcirkel. Die Endpunkte solcher Axe in der Oberfläche der Kugel, heißen die Pole aller der ihr zugehörigen Parallelcirkel. Drehet sich die Kugel um diese Axe: so beschreibt jeder Punkt ihrer Oberfläche einen zu solcher Axe gehörigen Parallelcirkel. Eine Ebene berührt die Kugel, wenn sie zwar ihre Oberfläche trift, aber ganz außerhalb der Kugel liegt, folglich die Kugel nur in einem Punkte berührt.

§. 200.

Reguläre Körper heißen solche, welche von gleichen regulären geradlinichten Figuren begrenzt werden; namentlich das Tetraëder von vier Triangeln; das Hexaëder, oder der Würfel von sechs Quadraten; das Oktaëder von acht Triangeln; das Dodekaëder von zwölf Pentagonen; das Ikosaeder von zwanzig Triangeln.

Zusatz. Außer diesen fünf Körpern ist keiner regulär. Denn aus drey gleichseitigen Triangeln entsteht der körperliche Winkel des Tetraëders, aus vieren des Oktaëders, aus fünfen des Ikosaëders, aus sechs oder mehrern entsteht kein körperlicher Winkel, weil ein Winkel des gleichseitigen Triangels = $\frac{2}{3}$ R, folglich sechs solche Winkel = 4 R. welches §. 177. unmöglich ist. Aus drey Quadraten entsteht der körperliche Winkel des Hexaëders, aber aus vier oder mehrern Quadraten entsteht §. 177. kein körperlicher Winkel. Aus drey regulären Pentagonen

entsteht der körperliche Winkel des Dodekaëders, aber aus vier oder mehrern entsteht kein körperlicher Winkel, weil ein Winkel des regulären Pentagons = $1\frac{1}{5}$ R. folglich vier solche Winkel > 4 R. welches §. 177. unmöglich ist. Aus andern Polygonen ist es noch weniger möglich einen körperlichen Winkel zu machen.

Anmerkung. Die Alten haben die Theorie der regulären Körper mit großem Scharfsinn aus einander gesetzt; nur kann man sich von ihrer Anwendung wohl keinen besondern Nutzen versprechen.

Zweyter Abschnitt.

Die gemischte Geometrie.

1. Von der Ausmessung der Größen.
2. Von der Berechnung ebener Triangel; oder die ebene Trigonometrie.
3. Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.

Erstes Kapitel.

Von der Ausmessung der Größen.

I. Ausmessung der Linien und Winkel.

§. 1.

Eine Größe, welche man als bekannt und gegeben annimmt, und womit man andere Größen derselben Art vergleicht, um die Verhältniß derselben gegen solche Größe, als gegen die Einheit, durch eine Zahl auszudrücken, heißt ein Maaß. Das Maaß gerader Linien ist eine gerade Linie, wozu man die Länge eines Fußes, die aber selbst wieder sehr verschieden ist, und verschiedentlich eingetheilt wird, angenommen hat. Nach dem geometrischen oder Decimalmaaße wird der Fuß in 10 Zoll, der Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel eingetheilt; so wie 10 Fuß eine Ruthe ausmachen. Die Zeichen für Ruthe, Fuß, Zoll, Linien, Scrupel sind: $^{\circ}\ ^{\prime}\ ^{\prime\prime}\ ^{\prime\prime\prime}\ ^{\mathrm{IV}}$. Beym Rheinländischen, oder Duode-

 cimal,

cimal, oder Werkmaaße, finden eben die Benennungen und Zeichen statt; nur daß die Eintheilung durch die Zahl 12 geschiehet. Zum Unterschiede kann man auch dieses durch kleine, und jenes durch große Buchstaben bezeichnen.

Z. E. $8^\circ\ 4'\ 5''\ 3'''\ 7^{IV}$; oder 8 R, 4 F, 5 Z, 3 L, 7 S; oder 8 r, 4 f, 5 z, 3 l, 7 s, heißt 8 Ruthen, 4 Fuß, 5 Zoll, 3 Linien, 7 Scrupel, Duodecimalmaaß, oder Decimalmaaß, oder beydes, je nachdem kleine, oder große Buchstaben, oder Zeichen gebraucht sind.

Zusatz. 1. Bey dem Decimalmaaße hat man noch die Bequemlichkeit, daß man dasselbe auch nach Art der Decimalzahlen bezeichnen kann; weil hiernach $1' = \frac{1}{10}^\circ$, $1'' = \frac{1}{100}^\circ$ u. s. w. ist. So kann z. E. das obige Beyspiel auch ausgedrückt werden: $8{,}4537^\circ$ oder $84{,}537'$ oder $845{,}37''$ u. s. w.

2. Eine französische Ruthe, oder eine Toise ist $= 6'$, $1' = 12''$, $1'' = 12'''$, $1''' = 10^{IV}$; wornach also der Pariser Fuß in 1440 gleiche Theile oder Scrupel getheilt wird.

§. 2.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Fußmaaße, A : B, gegeben ist, jede Anzahl Fuße n, nach dem einen Maaße, dessen Verhältnißzahl A ist, in die zugehörige Anzahl Fuße x, nach dem andern Maaße, dessen Verhältnißzahl B ist, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B : A = n : x$; folglich $\log. x = \log. n \mp \log. \frac{A}{B}$; in welcher Formel das positive Zeichen gilt, wenn $A > B$; das negative aber, wenn $A < B$ ist.

Z. E. Wenn der Pariser Fuß zum Rheinländischen wie 14400 : 13913, das ist, wenn $14400'$ Rheinl. = $13913'$ Paris. und man soll 1080 Pariser Fuß in Rheinländi-

ländische verwandeln: so setzt man, 13913 Par. Fuß geben 14400 Rheinländ. Fuß, was geben 1080 Pariser Fuß? oder

$$13913 : 14400 = 1080 : x$$

folglich $\log. x = \log. 1080 + \log. \frac{14400}{13913}$.

§. 3.

Aufgabe: Das geometrische Längenmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Da es hier nur auf die verschiedene Eintheilung in in 10 oder 12 Theile ankommt: so nimmt man dabey den Fuß von gleicher Größe an, so daß

$$1 \text{ Fuß} = 10\ Z. = 12\ z.$$
$$1 \text{ Fuß} = 100\ L. = 144\ l.$$
$$1 \text{ Fuß} = 1000\ S. = 1728\ f.$$

Demnach ist

1) $10\ Z = 12\ z$, folglich $Z = \frac{12}{10} z = z + \frac{2}{10} z$. Nun ist $z = 12\ l$, und daher $\frac{2}{10} z = \frac{24}{10} l = 2\ l + \frac{4}{10} l$. Folglich ist $Z = z + 2\ l + \frac{4}{10} l$. Nun ist $l = 12\ f$, und daher $\frac{4}{10} l = \frac{48}{10} f = 4,8\ f$. Folglich ist $Z = z + 2\ l + 4,8\ f$.

2) $100\ L = 144\ l$, folglich $L = \frac{144}{100} l = l + \frac{44}{100} l$. Nun ist $l = 12\ f$, und daher $\frac{44}{100} l = \frac{528}{100} f = 5,28\ f$. Folglich ist $L = l + 5,28\ f$.

3) $1000\ S = 1728\ f$, folglich $S = \frac{1728}{1000} f = 1,728\ f$.

Sollte man hiernach z. E. 9 Z, 8 L, 4 S auf Duodecimalmaaß bringen: so ist

$9\ Z =$	$(z + 2\ l + 4,8\ f)\ 9 =$	$10\ z + 9\ l + 7,2\ f$
$8\ L =$	$(l + 5,28\ f)\ 8 =$	$11\ l + 6,24\ f$
$4\ S =$	$(1,728\ f)\ 4 =$	$6,912\ f$
$9\ Z + 8\ L + 4\ S =$		$11\ z + 9\ l + 8,352\ f.$

§. 4.

Aufgabe: Das Längenwerkmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 3. ist

1) $12\,z = 10\,Z$; folglich $z = \frac{10}{12}\,Z = 0{,}833''$
2) $144\,l = 100\,L$; folglich $l = \frac{100}{144}\,L = 0{,}69''' = 0{,}069''$
3) $1728\,s = 1000\,S$: folglich $s = \frac{1000}{1728}\,S = 0{,}57^{IV} = 0{,}0057''$

Sollte man hiernach z. E. $8\,z$, $3\,l$, $5\,s$, auf Decimalmaaß bringen: so ist

$$8\,z = (0{,}833'') \cdot 8 = 6{,}664''$$
$$3\,l = (0{,}069'') \cdot 3 = 0{,}267''$$
$$5\,s = (0{,}0057'') \cdot 5 = 0{,}028''$$
$$8z + 3l + 5s = 6{,}959'' = 6\,Z + 9\,L + 5{,}9\,S.$$

Zusatz. 1. Bey beyden Aufgaben ist der Fuß von gleicher Größe angenommen worden. Sollte aber die Ruthe gleiche Größe haben: so gelten doch obige Formeln, wenn man darinnen setzt F und f, statt Z und z; Z und z, statt L und l; L und l, statt S und s.

2. Auch siehet man leicht ein, wie ein Maaß in ein andres zu verwandeln ist, wenn beyde nicht nur in Absicht der Größe, sondern auch in Absicht der Eintheilungsart verschieden sind. Z. E. man sollte $5{,}12'$ Rheinländisch in Londner Duodecimalmaaß verwandeln: so sind §. 2. $5{,}12'$ Rheinl. = $5{,}253'$ Londner. Letztre geben §. 3. $5'\,3''\,0'''\,5^{IV}$ Duodecimalmaaß.

§. 5.

Aufgabe: Einen verjüngten Maasstab zu verfertigen. Fig. 168.

Man nehme willkürlich eine gerade Linie AB, theile solche in gleiche Theile z. E. 4; errichte auf derselben in A einen Perpendikel AC von beliebiger Länge, theile ihn

in eben so viel gleiche Theile, und ziehe durch die Theilpunkte Parallellinien mit AB. Ferner mache man BD senkrecht, ziehe ED, und mit ihr Parallelen durch die übrigen Theilpunkte: so ist BE : AB = 1 : 4, und im △ DEB, III. §. 116.

DH : DB = PH : EB = 1 : 4.
DK : DB = NK : EB = 2 : 4.
DL : DB = LM : EB = 3 : 4.

Zusatz. 1. Auf die Art siehet man leicht, wenn die Eintheilung in 10 oder 12 Theile geschiehet, wie man hiedurch einen geometrischen oder Werkfuß in Zolle, und die Zolle in Linien eintheilen könne.

2. Durch Hülfe des verjüngten Maaßstabes lassen sich mit geraden Linien alle arithmetische Operationen vornehmen; wozu auch die sogenannte arithmetische Linie des Proportionalcirkels dient.

3. Statt des verjüngten Maaßstabes, oder der Eintheilung durch Transversallinien, giebt es noch eine andre vorzügliche Methode, welche nach ihren Erfindern der Nonius (Nunnez) oder Vernier (Werner) heißt.

§. 6.

Aufgabe: Einen Nonius oder Vernier für das Längenmaaß zu verfertigen. Fig. 169.

Es sey AB = CD, und die erste in 5, die andere in 4 gleiche Theile getheilt. Jeder Theil der AB heiße a, jeder Theil der CD heiße b: so ist 4 b = 5 a, folglich b = $\frac{5}{4}$a = a + $\frac{1}{4}$a, das ist, b um $\frac{1}{4}$ größer als a. Demnach ist

$$DK - BE = b - a = \tfrac{1}{4}\,a$$
$$DL - BF = 2\,(b - a) = \tfrac{2}{4}\,a$$
$$DM - BG = 3\,(b - a) = \tfrac{3}{4}\,a.$$

Eben das gilt auch rückwärts von A nach B zu.

Setzt man in AB, statt 5, die Zahl der Theile n: so ist in CD die Zahl der Theile n — 1, und CD der Nonius oder Vernier, worinn jeder Theil um $\frac{1}{n-1}$ grösser ist, als $\frac{1}{n}$ AB.

§. 7.

Das Maaß eines Winkels ist ein Winkel. Man erwählt dazu den rechten Winkel, theilt ihn in 90 gleiche Theile, welche man nach Belieben weiter eintheilen kann, und bestimmt hiedurch die Verhältniß der Winkel. Da sich aber in gleichen Cirkeln III. §. 141. die Bogen wie die Winkel verhalten: so läßt sich die Verhältniß der Winkel auch durch die Verhältniß der Bogen bestimmen, und man kann in solcher Beziehung die Cirkelbogen als ein Maaß der Winkel ansehen. Hiezu theilt man die Peripherie des Cirkels in 360, folglich den vierten Theil der Peripherie, oder einen Quadranten, in 90 gleiche Theile, welche man Grade nennt. Jeder Grad wird in 60 Minuten; jede Minute in 60 Secunden; jede Secunde in 60 Tertien u. s. w. getheilt. Die Zeichen der Grade, Minuten, Secunden, Tertien, sind ° ′ ″ ‴.

Zusatz. 1. Es ist willkürlich mit welchem Halbmesser der Cirkel gezogen sey.

2. Ein Instrument, welches einen halben Cirkel in seine Grade eingetheilt enthält, heißt ein Transporteur.

3. Für Cirkelbogen hat man auch einen Vernier oder Nonius auf ähnliche Art, wie für gerade Linien.

§. 8.

§. 8.

Ist n die Anzahl der Seiten eines regulären Polygons: so ist der Centriwinkel $= \frac{4 \mathfrak{R}}{n}$, und der Polygonwinkel $= \frac{2 n \mathfrak{R} - 4 \mathfrak{R}}{n} = 2 \mathfrak{R} - \frac{4 \mathfrak{R}}{n}$; folglich jeder das Complement des andern zu zwey rechten Winkeln.

Beschreibt man um das Polygon einen Cirkel; und ziehet vom Mittelpunkte gerade Linien nach den Polygonspitzen: so wird das Polygon in n gleiche Triangel getheilt, und jeder Polygonwinkel halbirt, auch sind alle Centriwinkel einander gleich. Diese aber sind zusammen $= 4 \mathfrak{R}$, folglich jeder $= \frac{4 \mathfrak{R}}{n}$. In jedem Triangel sind die Winkel $= 2 \mathfrak{R}$, folglich die Winkel in allen diesen Triangeln $= 2 n \mathfrak{R}$, folglich die Polygonwinkel $= 2 n \mathfrak{R} - 4 \mathfrak{R}$, folglich jeder $\frac{2 n \mathfrak{R} - 4 \mathfrak{R}}{n} = 2 \mathfrak{R} - \frac{4 \mathfrak{R}}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

II. Ausmessung der Flächen.

§. 9.

Das Maaß einer Fläche ist eine Fläche. Man erwählt hiezu das Quadrat, und nennt es Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll u. s. w. je nachdem seine Seite eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll lang ist. Jedes dieser Quadrate wird entweder in 100, oder in 144 gleiche Theile getheilt, je nachdem seine Seite entweder in 10 oder in 12 gleiche Theile getheilt ist. Fig. 170.

Ein Quadrat AC, dessen Seite = 5, indem die Seite des Quadrats AE = 1 ist, würde offenbar 5 . 5 oder 25 solcher Quadrate, als AE ist, enthalten; weil III. §. 136. Zus. 1. $AE : AC = AF^2 : AB^2 = 1^2 : 5^2 = 1 : 25$. Folglich würde ein Quadrat, dessen Seite = 10 ist, 100; und ein Quadrat, dessen Seite = 12 ist, 144 solcher kleinen Quadrate enthalten.

Zusatz. Die Bequemlichkeit des Decimallängenmaaßes §. 1. Zus. 1. findet auch beym Quadratmaaße statt. Denn da $1\ F^2 = \frac{1}{100} R^2$, $1\ Z^2 = \frac{1}{10000} R^2$ u. s. w. ist: so kann man statt $37° 24' 36'' 45'''$ auch schreiben $37,243645°$ oder $3724,3645'$, oder $372436,45''$ u. s. w.

§. 10.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Quadratfuße, $A^2 : B^2$, gegeben ist, jede Anzahl Quadratfuße n, nach dem ersten Maaße in die zugehörige Zahl x, nach dem andern Maaße, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B^2 : A^2 = n : x$, folglich $\log. x = \log. n \mp 2 \log. \frac{A}{B}$. Z. E. 1000 Pariser Quadratfuße, wie viel Rheinländische? wo $\log. x = \log. 1000 + 2 \log. \frac{1440}{1391\frac{1}{3}}$.

§. 11.

Aufgabe: Das geometrische Quadratmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Nimmt man hier wiederum den Fuß von gleicher Größe an: so ist

1 Quadratfuß = $100\ Z^2 = 144\ z^2$
1 Quadratfuß = $10000\ L^2 = 20736\ l^2$
1 Quadratfuß = $1000000\ S^2 = 2985984\ \mathfrak{f}^2$.

Dem-

Demnach ist

1) $100\,Z^2 = 144\,z^2$, folglich $Z^2 = \frac{144}{100} z^2 = z^2 + \frac{44}{100} z^2$. Nun ist $z^2 = 144\,l^2$, und daher $\frac{40}{100} z^2 = \frac{6336}{100} l^2 = 63\,l^2 + \frac{36}{100} l^2$. Folglich ist $Z^2 = z^2 + 63\,l^2 + \frac{36}{100} l^2$. Nun ist $l^2 = 144\,\text{ſ}^2$, und daher $\frac{36}{100} l^2 = \frac{5184}{100} \text{ſ}^2 = 51{,}84\,\text{ſ}^2$. Folglich ist $Z^2 = z^2 + 63\,l^2 + 51{,}84\,\text{ſ}^2$.

2) $10000\,L^2 = 20736\,l^2$, folglich $L^2 = \frac{20736}{10000} l^2 = 2\,l^2 + \frac{736}{10000} l^2$. Nun ist $l^2 = 144\,\text{ſ}^2$, und daher $\frac{736}{10000} l^2 = \frac{105984}{100000} \text{ſ}^2 = 10{,}5984\,\text{ſ}^2$. Folg. ist $L^2 = 2\,l^2 + 10{,}5984\,\text{ſ}^2$.

3) $1000000\,S^2 = 2985984\,\text{ſ}^2$, folglich $S = 2{,}985984\,\text{ſ}^2$.

Sollte man hiernach $4\,Z^2 + 9\,L^2 + 20\,S^2$ auf Duodecimalmaaß bringen: so ist

$$\begin{array}{lll}
4Z^2 = (z^2 + 63\,l^2 + 51{,}84\,\text{ſ}^2).4 = & 4z^2 + 252\,l^2 + 207{,}32\,\text{ſ}^2 \\
9L^2 = (2\,l^2 + 10{,}5984\,\text{ſ}^2).9 = & 18\,l^2 + 95{,}38\,\text{ſ}^2 \\
20S^2 = (2{,}985984\,\text{ſ}^2).20 = & 59{,}71\,\text{ſ}^2 \\
\hline
4Z^2 + 9L^2 + 20S^2 = & 4z^2 + 270\,l^2 + 362{,}41\,\text{ſ}^2
\end{array}$$

welches, gehörig reducirt, $= 5\,z^2 + 128\,l^2 + 74{,}41\,\text{ſ}^2$.

§. 12.

Aufgabe: Das quadratische Werkmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 11 ist

1) $144\,z^2 = 100\,Z^2$, folglich $z^2 = \frac{100}{144} Z^2 = 0{,}694444''$

2) $20736\,l^2 = 10000\,L^2$, folglich $l^2 = \frac{10000}{20736} L^2 = 0{,}48\,\ldots\,''' = 0{,}0048\,\ldots\,''$

3) $2985984\,\text{ſ}^2 = 1000000\,S^2$ folglich $\text{ſ}^2 = \frac{1000000}{2985984} S^2 = 0{,}33^{IV} = 0{,}000033''$.

Hiernach ist die Verwandelung leicht geschehen.

Zusatz.

Zusatz. §. 4. Zus. ingleichen §. 5. läßt sich auch auf das Quadratmaaß anwenden.

§. 13.

Aufgabe: Jedes Parallelogramm auszumessen.

Wenn Q das Quadratmaaß, dessen Seite = 1, des Parallelogramms P Grundlinie = b und Höhe = a: so ist III. §. 140. Q : P = 1 : ab. Nun ist Q = 1. Folglich ist P = ab.

Zusatz. 1. Aus P = ab folgt 1 : a = b : P, desgleichen $\frac{P}{b} = a$, und $\frac{P}{a} = b$.

2. Ist P ein Quadrat: so ist a = b, folglich $P = a^2$, folglich $\sqrt{P} = a$.

3. Ist der Inhalt eines andern Parallelogramms $\Pi = \alpha . \beta$: so ist $P : \Pi = ab : \alpha\beta$. Wäre nun $a = \alpha$: so wäre $P : \Pi = b : \beta$. Wäre $b = \beta$; so wäre $P : \Pi = a : \alpha$. Wäre $P = \Pi$: so wäre $ab = \alpha\beta$; folglich $a : \alpha = \beta : b$.

§. 14.

Aufgabe: Jeden Triangel auszumessen.

Da III. §. 49. Zus. 1. der Triangel T, die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie b, und Höhe a: so ist $T = \frac{a . b}{2} = \frac{a}{2} . b = \frac{b}{2} . a$.

Zusatz. 1. Aus $T = \frac{ab}{2}$ folgt $\frac{2T}{a} = b$, und $\frac{2T}{b} = a$.

2. In einem rechtwinklichten Triangel sey die Hypothenuse h, die Katheten a und b: so ist $h = \sqrt{a^2 + b^2}$, und $a = \sqrt{h^2 - b^2}$, auch $b = \sqrt{h^2 - a^2}$.

§. 15.

§. 15.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur auszumessen.

Man theile die Figur durch Diagonalen in Triangel, messe solche und bringe sie in eine Summe.

§. 16.

Aufgabe: Jede geradlinichte Figur in ein Quadrat zu verwandeln, oder zu quadriren.

Da jede geradlinichte Figur sich in ein Parallelogramm, und dieses in ein Rectangel verwandeln läßt: so sey dies geschehen, und der Inhalt des Rectangels = ab. Ist nun die Seite des gesuchten Quadrats x: so ist $ab = x^2$, folglich $a : x = x : b$, oder $x = \sqrt{ab}$.

§. 17.

Aufgabe: Jedes reguläre Polygon von n Seiten auszumessen, wenn die Polygonseite AB, und des um das Polygon beschriebenen Cirkels Halbmesser CA = 1, gegeben ist. Fig. 171.

Ziehet man von dem Mittelpunkte C, gerade Linien nach den Spitzen des Polygons: so wird dasselbe in n gleiche Triangel, wovon einer ACB ist, getheilt. Fället man von C auf AB den Perpendikel CE: so halbirt solcher AB in E, und ist die Höhe des $\triangle ACB$. Nun ist $CE = \sqrt{CA^2 - AE^2} = \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$. Folglich ist §. 14. $\triangle ACB = \frac{AB \cdot \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}}{2}$, folglich das Polygon $= \frac{n \cdot AB \cdot \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}}{2}$.

Zusatz. 1. Demnach ist ein solches Polygon einem Triangel gleich, dessen Grundlinie dem Perimeter des Polygons n . AB, und dessen Höhe dem Perpendikel vom Mit-

Mittelpunkte auf die Polygonseite, $CE = \sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$, gleich ist.

2. Aus dem Inhalte eines regulären Polygons für den Halbmesser 1, findet man leicht den Inhalt eines ähnlichen Polygons für den Halbmesser r; weil III. §. 144. jener zu diesem wie 1 zu r^2.

3. Aus dem Inhalte des innern Polygons findet man leicht den Inhalt des äußern; weil III. §. 145. jener zu diesen wie CE^2 zu $CA^2 = 1 - \frac{1}{4} AB^2 : 1$.

§. 18.

Aufgabe: Aus der gegebenen Seite AB, des in einem Cirkel beschriebenen regulären Polygons von n Seiten, und dem Halbmesser CA = 1, die Seite AD eines in demselben Cirkel beschriebenen regulären Polygons von 2 n Seiten zu finden. Fig. 171.

Da $AD^2 = AE^2 + ED^2$; und $AE = \frac{1}{2} AB$: so ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + ED^2$. Nun ist $ED = CD - CE = 1 - CE$, und daher $ED^2 = 1 - 2 CE + CE^2$. Folglich ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 1 - 2 CE + CE^2$. Nun ist $CE^2 = AC^2 - AE^2 = 1 - \frac{1}{4} AB^2$, und daher $2 CE = 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$. Folglich ist $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 1 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)} + 1 - \frac{1}{4} AB^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}$; folglich $AD = \sqrt{2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)}}$.

Wäre demnach AB die Seite einer sechsseitigen Figur = 1: so ist AD die Seite einer zwölfseitigen Figur $= \sqrt{(2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}})} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0{,}51763809$. Nimmt man nun AB für die Seite einer zwölfseitigen Figur: so findet man AD die Seite einer 24seitigen Figur. Auf die Art findet man ferner die Seite einer 48, 96, 192, 384, 768seitigen Figur und so weiter. Letztere ist = 0,0081811 und die Sehne eines Bogens von $28\frac{1}{8}$ Minute.

Zusatz.

Zusatz. Vervielfältigt man die gefundene Seite mit der Zahl der Polygonseiten: so hat man den Perimeter des innern Polygons, und hieraus den Perimeter des äußern, weil sich III. §. 145. jener zu diesem verhält, wie CE zu CA = $\sqrt{(1 - \frac{1}{4} AB^2)} : 1$.

§. 19.

Aufgabe: Die Länge der Cirkelperipherie für den Halbmesser 1, so genau als man will zu finden, oder den Cirkel zu rectificiren.

Da die Peripherie des Cirkels zwischen den Perimetern des innern und äußern Polygons: so berechne man §. 18. solche Perimeter als Grenzen für die Peripherie, welche desto näher zusammenrücken, je mehrmal man die Zahl der Polygonseiten verdoppelt.

So ist z. E. der Perimeter der innern sechsseitigen Figur = 6; der äußern = 6,9282038; folglich die Peripherie zwischen 6,0 und 6,9. Will man solche näher haben: so ist der Perimeter der innern 768seitigen Figur = 6,2830848, der äußern = 6,2831375; folglich die Peripherie zwischen 6,2830 und 6,2831. Setzte man daher für den Halbmesser 1 die Peripherie = 6,2830 oder für den Durchmesser 1 die Peripherie π = 3,1415: so würde der Fehler noch nicht $\frac{1}{10000}$ betragen, welchen man auch nach Belieben vermindern könnte, wenn man die Anzahl der Polygonseiten noch weiter verdoppelte. Auf diese mühsame Art fand Ludolph von Ceulen für den Durchmesser 1 die Peripherie

$$\pi = 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 383879\ 50$$

Anmerkung. Diese Ludolphische Zahl, welche bis auf 32 Decimalstellen gehet, hat Sherwin bis auf 72, Machin bis auf 120, und Lagny bis auf 127 erweitert. Aber schon die erste ist mehr als hinreichend,

und

und dient allen vorgeblichen Erfindungen der Cirkelquadratur zur Prüfung. So ist z. E. die Archimedische Zahl $\frac{22}{7} = 3,142\ldots$ welche schon bey der dritten Decimalstelle abweicht. Des Metius Zahl ist $\frac{355}{113} = 3,1415929$, welche erst bey der siebenten Decimalstelle abweicht.

Zusatz. 1. Demnach ist bey einem Cirkel, dessen Durchmesser d, und dessen Peripherie p heißt, $p : d = \pi : 1$, und eben so bey einem andern Cirkel $P : D = \pi : 1$; folglich $P : p = D : d = R : r$, das heißt, die Peripherien der Cirkel verhalten sich wie ihre Durchmesser, oder Halbmesser.

2. Aus dem Durchmesser eines Cirkels $2r = d$, findet man die Peripherie p, wenn man setzt $1 : \pi = 2r : p$, folglich $p = 2r \cdot \pi = d \cdot \pi$.

3. Aus $p = 2r\pi$ findet man $r = \frac{p}{2\pi} = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{\pi}$, da denn

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309\ 886183\ 790671\ 537767\ 926.$$

4. Hieraus läßt sich auch die Länge eines jeden Cirkelbogens finden, wenn man setzt: 360 Grad zu der Gradzahl des Bogens, so die ganze Peripherie zu der Länge solches Bogens.

§. 20.

Aufgabe: Einen Cirkel, dessen Halbmesser r ist, auszumessen, oder zu quadriren.

Da §. 17. Zus. 1. das reguläre Polygon einem Triangel gleich ist, dessen Grundlinie dem Perimeter, und dessen Höhe dem Perpendikel vom Mittelpunkt auf die Polygonseite gleich ist: so ist der Cirkel einem Triangel gleich, dessen Grundlinie der Peripherie, und dessen Höhe dem Halbmesser des Cirkels gleich ist. Demnach ist der

Inhalt

Inhalt des Cirkels $a = \frac{p \cdot r}{2} = \frac{1}{2} p \cdot r$. Nun ist §. 19. Zus. 2. $p = 2 r \pi$, und daher $\frac{1}{2} p = r \pi$. Folglich ist $a = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$.

Zusatz. 1. Aus $a = r^2 \pi$ folgt $a : r^2 = \pi : 1$, und eben so $A : R^2 = \pi : 1$; folglich $A : a = R^2 : r^2 = D^2 : d^2$, das heißt, die Cirkelflächen verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser, oder Durchmesser.

2. Aus $a = r^2 \pi$ folgt $\frac{a}{\pi} = r^2$, folglich $\sqrt{\left(a \cdot \frac{1}{\pi}\right)} = r$, wornach jede geradlinichte Figur, deren Inhalt $= a$, in einen Cirkel verwandelt werden kann. Auch lassen sich zwey Cirkel, deren Halbmesser R, r, in einen zusammenbringen, dessen Halbmesser $\sqrt{(R^2 + r^2)}$ seyn müßte.

3. Den Inhalt x, eines jeden Ausschnitts von n Grad findet man, wenn man setzt: $360 : n = r^2 \pi : x$, folglich $x = \frac{n}{360} \cdot r^2 \pi$.

4. Hieraus findet man den Abschnitt, dessen Grundlinie AB Fig. 171. wenn man den $\triangle$ ACB, dessen Höhe $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$ ist, von dem Ausschnitte subtrahirt.

5. Sind die Halbmesser R, r, zweyer concentrischen Cirkel gegeben; deren Inhalt also $R^2 \pi$ und $r^2 \pi$: so ist der Ring zwischen den beyderseitigen Peripherien $= R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi$.

6. Es sey Fig. 172. ACB ein rechtwinklichtrr gleichschenklichter Triangel. Aus C beschreibe man mit CA den Quadranten AEB; und aus F mit FA = FB den halben Cirkel ADB: so erhellet aus Zus. 2. daß der halbe Cirkel dem Quadranten, folglich, wenn man den Abschnitt AEB davon nimmt, die lunula Hippocratis ADBE = $\triangle$ACB sey.

III. Ausmessung der Körper.

§. 21.

Das Maaß eines Körpers ist ein Körper. Man erwählt hiezu einen Würfel oder Cubus, und nennt ihn Cubikruthe, Cubikfuß, Cubikzoll u. s. w. je nachdem seine Seite eine Ruthe, oder einen Fuß, oder einen Zoll lang ist. Jeder dieser Würfel, wird entweder in 1000, oder in 1728 gleiche Theile getheilt, je nachdem seine Seite in 10, oder in 12 gleiche Theile getheilt ist. Fig. 170.

Auf den Quadraten AC, AE, denke man sich Würfel: so würde offenbar der erste 25 . 5 oder 125 solche Würfel als der zweyte ist, enthalten; weil III. §. 189. der zweyte zum ersten wie $AF^3 : AB^3 = 1 : 5^3 = 1 : 125$. Folglich würde ein Würfel, dessen Seite = 10 ist, 1000; und ein Würfel, dessen Seite = 12 ist, 1728 solcher kleinen Würfel enthalten.

Zusatz. Die Bequemlichkeit des Decimallängenmaaßes §. 1. Zus. 1. findet auch beym Körpermaaße statt. Denn da $1\ F^3 = \frac{1}{1000}\ R^3$, $1\ Z^3 = \frac{1}{1000000}\ R^3$ u. s. w. ist: so kann man statt $3^\circ\ 425'\ 739''\ 628'''$ auch setzen $3{,}425739628^\circ$ oder $3425{,}739628'$ oder $3425739{,}628''$ u. s. w.

§. 22.

Aufgabe: Wenn die Verhältniß zweyer Cubikfuße, $A^3 : B^3$, gegeben ist, jede Anzahl Cubikfuße n nach dem ersten Maaße, in die zugehörige Zahl x nach dem andern Maaße, zu verwandeln.

Hier ist offenbar $B^3 : A^3 = n : x$, folglich $\log. x = \log. n + 3 \log. \frac{A}{B}$. Z. E. 1000 Pariser Cubikfuße,

wie

c. Weil der Nenner [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] der [illegible] [illegible] log. [illegible] [illegible] log. [illegible] [illegible] log. [illegible]

§. [illegible]

Aufgabe. Das [illegible] Fußmaaß in das Rheinmaaß zu verwandeln.

Nimmt man hier wiederum den [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] an, so ist

1 [illegible] = 1000 [illegible] = [illegible]

1 [illegible] = 1000000 [illegible] = [illegible]

Demnach ist

[illegible] [illegible], folglich [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ist [illegible] [illegible] und [illegible] [illegible] [illegible]. Ferner ist [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Folglich [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

§. [illegible]

Aufgabe. Das [illegible] in den [illegible] [illegible] zu verwandeln.

[illegible] ist

[illegible] [illegible], folglich [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible], folglich [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Cubikmaaß.

§. [illegible]

Aufgabe. Einen Parallelepipedum auszumessen.

Man [illegible] das [illegible], dessen Seite = [illegible], der [illegible] Grundfläche = [illegible], und Höhe = [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] = [illegible]. [illegible] ist [illegible] = [illegible], folglich [illegible] = [illegible].

wie viel Rheinländische? wo $\log. x = \log. 1000 + 3 \log. \frac{14400}{13913}$.

§. 23.

Aufgabe: Das geometrische Cubikmaaß in das Werkmaaß zu verwandeln.

Nimmt man auch hier wiederum den Fuß von gleicher Größe an: so ist

1 Cubikfuß $= 1000\, Z^3 = 1728\, z^3$
1 Cubikfuß $= 1000000\, L^3 = 2985984\, l^3$

Demnach ist

1) $1000\, Z^3 - 1728\, z^3$, folglich $Z^3 = z^3 + \frac{728}{1000} z^3$. Nun ist $z^3 = 1728\, l^3$, und daher $\frac{728}{1000} z^3 = 1257{,}984\, l^3$. Folglich ist $Z^3 = z^3 + 1257{,}984\, l^3$.

2) $1000000\, L^3 = 2985984\, l^3$. Folglich $L^3 = 2{,}985984\, l^3$.

§. 24.

Aufgabe: Das Werkcubikmaaß in das geometrische zu verwandeln.

Nach §. 23. ist

1) $1728\, z^3 = 1000\, Z^3$, folglich $z^3 = 0{,}578''$
2) $2985984\, l^3 = 1000000\, L^3$, folglich $l^3 = 0{,}33''' = 0{,}000033''$.

Zusatz. §. 4. Zus. 1. desgleichen §. 5. gehört auch für das Cubikmaaß.

§. 25.

Aufgabe: Jedes Parallelepiped auszumessen.

Wenn C das Cubikmaaß, dessen Seite = 1, des Parallelepipeds P Grundfläche = bc, und Höhe = a: so ist III. §. 188. $C : P = 1 : abc$. Nun ist $C = 1$, folglich ist $P = abc$.

Zusatz. 1. Aus $P = abc$ folgt $\frac{P}{bc} = a$ und $\frac{P}{a} = bc$.

2. Ist P ein Würfel: so ist $a = b = c$, folglich $P = a^3$ und $\sqrt[3]{P} = a$.

3. Ist der Inhalt eines andern Parallelepipeds $\Pi = \alpha\beta\gamma$: so ist $P : \Pi = abc : \alpha\beta\gamma$. Ist nun $a = \alpha$, so ist $P : \Pi = bc : \beta\gamma$. Ist $bc = \beta\gamma$: so ist $P : \Pi = a : \alpha$. Ist $P = \Pi$: so ist $abc = \alpha\beta\gamma$; folglich $a : \alpha = \beta\gamma : bc$.

§. 26.

Aufgabe: Jedes Prisma auszumessen.

Das dreyseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Grundfläche bc und Höhe a; folglich sein Inhalt $= \frac{abc}{2} = \frac{bc}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot bc$.

Ein vielseitiges Prisma läßt sich durch Diagonalebenen in dreyseitige theilen, daher sein Inhalt das Product der gemeinschaftlichen Höhe in die Summe der einzelnen Grundflächen, folglich in die ganze Grundfläche ist.

Zusatz. Aus $P = \frac{abc}{2}$ findet man $a = \frac{2P}{bc}$ und $bc = \frac{2P}{a}$.

§. 27.

Grundsatz. Körper von gleichen Höhen und Grundflächen, welche durchaus in einerley Höhe gleiche Durchschnitte geben, haben gleiche Ausdehnung an Höhe, und Weite, und sind demnach einander gleich.

§. 28.

Cylinder und prismatische Körper von gleichen Grundflächen und Höhen, sind einander gleich.

Denn jeder Durchschnitt eines solchen Körpers ist III. §. 191. der Grundfläche gleich. Nun ist die Grundfläche

Kugelhöhe, daß die Grundfläche der andern gleich. Folglich ist auch jeder Durchschnitt des einen dem Durchschnitte des andern gleich. Wir haben ja auch oben bewiesen (§. 27.), daß ein Cörper dem andern gleich.

Zusatz. Die Wahrheiten, welche von den prismatischen Körpern bewiesen worden, gelten also auch von den Cylindern. Demnach sind ähnliche Cylinder in einem Verhältniß der Durchmesser oder Seitenlinien ihrer Grundflächen, und Cylinder von gleicher Höhe in einem Verhältniß ihrer Durchmesser.

§. 29.

Aufgabe: Einen Cylinder auszumessen.

Die Höhe des Cylinders sey a, der Durchmesser der Grundfläche r; so ist, da die Grundfläche $\frac{r^2 n}{4}$, (§. 26.) der Inhalt des Cylinders $V = a \cdot r^2 n = \frac{ar^2 n}{4}$.

Zusatz 1. Wollte man einen Cylinder, dessen Durchmesser R, als Röhre, dessen Höhe a, ausmessen; so wäre der Inhalt dieser cylindrischen Röhre $V = a \cdot \frac{R^2 n}{4} - \frac{ar^2 n}{4} = \frac{(R^2 - r^2)an}{4}$; folglich $\frac{4V}{(R^2 - r^2)n} = a$.

2. Der Inhalt eines andern Cylinders, dessen Höhe α und Durchmesser ρ, sey Q; so ist $Q = \frac{\alpha \rho^2 n}{4}$. Folglich $V : Q = ar^2 n : \alpha\rho^2 n = ar^2 : \alpha\rho^2$. Ist $a = \alpha$, so ist $V : Q = r^2 : \rho^2$. Ist $r = \rho$, so ist $V : Q = a : \alpha$. Ist $V = Q$, so ist $ar^2 = \alpha\rho^2$, folglich $a : \alpha = \rho^2 : r^2$.

3. In vorhergehender Proportion $V : Q = ar^2 : \alpha\rho^2$, setze man $\alpha = r$, und $\rho = r$; so ist $V : Q = ar^2 : r^3$ [illegible]; folglich $Q = $ [illegible] V. Auf diese Weise erhält sich die Bestimmung des cylindrischen Inhaltes.

[illegible]

[illegible]

§. [illegible]

Aufgabe, Jedes Prisma auszumessen.

Der kubische Inhalt ist das Product einer [illegible] Grundfläche [illegible] Höhe [illegible]

Ein vielseitiges Prisma läßt sich durch Diagonalebenen in dreyseitige theilen, daher sein Inhalt das Product aus gemeinschaftlicher Höhe in die Summe der einzelnen Grundflächen, folglich in die ganze Grundfläche ist.

[illegible]

§. [illegible]

Lehrsatz. Körper von gleichen Höhen und Grundflächen, welche durchaus in gleichen Höhen gleiche Durchschnitte geben, haben gleiche Ausdehnung an Größe und Werth, und sind demnach einander gleich.

§. [illegible]

Cylinder und prismatische Körper von gleichen Grundflächen und Höhen, sind einander gleich.

Denn jeder Durchschnitt eines solchen Körpers ist (II. §. 291.) der Grundfläche gleich. Nun ist, [illegible]

[illegible]

fläche des einen der Grundfläche des andern gleich. Folglich ist auch jeder Durchschnitt des einen dem Durchschnitte des andern gleich. Nun haben sie auch einerley Höhe. Folglich ist §. 27. der eine Körper dem andern gleich.

Zusatz. Die Verhältnisse, welche von den prismatischen Körpern bewiesen worden, gelten also auch von den Cylindern. Demnach sind ähnliche Cylinder in cubischer Verhältniß der Durchmesser oder Halbmesser ihrer Grundflächen; und Cylinder von gleicher Höhe in quadratischer Verhältniß solcher Durchmesser.

§. 29.

Aufgabe: Jeden Cylinder auszumessen.

Die Höhe des Cylinders sey a, der Halbmesser der Grundfläche r: so ist §. 20. die Grundfläche $r^2 \pi$, folglich §. 26, 28. der Inhalt des Cylinders $V = a \,.\, r^2 \pi = \frac{ad^2 \pi}{4}$.

Zusatz. 1. Würde aus einem Cylinder, dessen Halbmesser R, ein Cylinder, dessen Halbmesser r ausgeschnitten: so wäre der Inhalt solcher cylindrischen Röhre $V = a \,.\, R^2 \pi - ar^2 \pi = (R^2 - r^2) a\pi$; folglich $\frac{V}{(R^2 - r^2)\pi} = a$.

2. Der Inhalt eines andern Cylinders, dessen Höhe α und Halbmesser ϱ, sey Q: so ist $Q = \alpha \,.\, \varrho^2 \pi$; folglich $V : Q = ar^2\pi : \alpha\varrho^2\pi = ar^2 : \alpha\varrho^2$. Ist $a = \alpha$: so ist $V : Q = r^2 : \varrho^2$. Ist $r = \varrho$: so ist $V : Q = a : \alpha$. Ist $V = Q$: so ist $ar^2 = \alpha\varrho^2$, folglich $a : \alpha = \varrho^2 : r^2$.

3. In vorhergehender Proportion $V : Q = ar^2 : \alpha\varrho^2$, sey $\alpha = na$, und $\varrho = mr$: so ist $V : Q = ar^2 : nam^2 r^2 = 1 : n \,.\, m^2$; folglich $Q = nm^2 V$. Auf letzter Formel gründet sich die Verfertigung des cylindrischen Visirstabes.

§. 30.

Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

Denn jeder Durchschnitt der Pyramide GK Fig. 165. verhält sich III. §. 193. zur Grundfläche BE und jeder Durchschnitt des Kegels FK Fig. 166. verhält sich III. §. 195. zur Grundfläche BD wie $AM^2 : AN^2$. Folglich, wenn die Höhen beyderseits gleich sind, ist BE : GK = BD : FK. Nun ist BE = BD. Folglich ist auch GK = FK. Folglich ist §. 27. die Pyramide ABE dem Kegel ABD gleich.

Auf eben die Art führte man den Beweiß, wenn ABD eine andre Pyramide von einer beliebigen Anzahl Seiten gewesen wäre.

§. 31.

Ein Prisma, oder Cylinder ist dreymal so groß, als eine Pyramide, oder ein Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Es sey Fig. 173. das dreyseitige Prisma ABCDEF. Man ziehe die Diagonalen der Seitenflächen BD, EC, CD, für die dreyseitigen Pyramiden ABDC, DBEC, ECFD: so sind §. 30. die beyden ersten Pyramiden gleich, weil sie gleiche Grundflächen ABD, DBE, und einerley Spitze C haben; und eben so die beyden letzten einander gleich, weil sie gleiche Grundflächen ECF, CEB, und einerley Spitze D haben. Folglich ist auch die erste der letzten gleich, und demnach das Prisma in drey gleiche Pyramiden getheilt, folglich jede der dritte Theil des Prisma; folglich §. 28. 30. ein Kegel der dritte Theil des Cylinders von eben der Höhe und eben der Grundfläche.

Zusatz. 1. Wäre ein Prisma und eine Pyramide vielseitig: so können beyde in dreyseitig getheilt, oder auf drey-

§. [illegible]

[illegible]

[illegible]

Auf eben die Art führet man den Beweis, wenn [illegible]

§. [illegible]

Ein Prisma, oder Cylinder ist dreymal so groß, als eine Pyramide oder ein Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Es sey Fig. [illegible] das dreyseitige Prisma ABCDEF, [illegible]

[illegible]

[illegible]

dreyseitige gebracht werden. Demnach gilt der Satz allgemein.

2. Die Verhältnisse, welche von Prismen und Cylindern bewiesen worden, gelten also auch von Pyramiden und Kegeln.

§. 32.

Aufgabe. Jede Pyramide und jeden Kegel auszumessen.

Da §. 31. jene der dritte Theil des Prisma, und diese der dritte Theil des Cylinders ist: so ist §. 26. die Pyramide $= \frac{abc}{6}$, und §. 29. der Kegel $= \frac{ar^2\pi}{3}$.

Zusatz. Bey einer andern Pyramide wäre der Inhalt $= \frac{\alpha\beta\gamma}{6}$, und bey einem andern Kegel der Inhalt $= \frac{\alpha\varrho^2\pi}{3}$; woraus sich leicht die nöthigen Folgerungen ziehen lassen.

§. 33.

Aufgabe. Einen abgekürzten geraden Kegel AH, auszumessen, wenn der Halbmesser der Grundfläche $AC = r$, nebst der Höhe $CE = a$, und dem Halbmesser $DE = \varrho$, des der Grundfläche parallelen Schnitts gegeben ist. Fig. 174.

Ziehet man DB der CE parallel: so ist $AB = AC - DE$, und $DB = CE$. Nun ist III. §. 116. $AB : BD = AC : CF$, oder $r - \varrho : a = r : x$. Folglich ist $x = \frac{ar}{r-\varrho}$. Folglich ist §. 32. der Kegel FAG $= \frac{r^2\pi}{3} \cdot \frac{ar}{r-\varrho} = \frac{r^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$. Nun ist auch III. §. 118.

AB : BD = DE : EF, oder $r - \varrho : a = \varrho : \frac{a\varrho}{r-\varrho}$, und daher §. 32. der Kegel FDH $= \frac{\varrho^2\pi}{3} \cdot \frac{a\varrho}{r-\varrho} = \frac{\varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$.
Folglich ist AH = FAG — FDH $= \frac{r^3 - \varrho^3}{r-\varrho} \cdot \frac{a\pi}{3}$.

Zusatz. Eine abgekürzte Pyramide läßt sich mit einem abgekürzten Kegel vergleichen, und eben so ausmessen.

§. 34.

Eine Halbkugel AFDGB, ist doppelt so groß, als ein Kegel von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Fig. 175.

Auf dem Cirkel TK = AB sey ein Cylinder TL, dessen Höhe OP = CD, und woraus der Kegel HOL, als $\frac{1}{3}$ TL, geschnitten worden, so daß der übrige Körper HTOKL = 2 HOL ist. Durch diesen Körper gehe ein Schnitt MN, der Grundfläche parallel: so ist solcher Schnitt ein Ring zwischen den Cirkeln RS, MN, folglich §. 20. Zus. 5. $= (QM^2 - QR^2)\pi = (QM^2 - OQ^2)\pi$; weil OP = CD = CA = PH, und OP : PH = OQ : QR, folglich OQ = QR ist.

Durch die Halbkugel gehe gleichfalls ein Schnitt FG, parallel mit der Grundfläche in der Höhe CE = OQ, und man ziehe CF: so ist §. 20. dieser Schnitt $= EF^2 \cdot \pi = (CF^2 - CE^2)\pi = (QM^2 - OQ^2)\pi$. Demnach sind beyde Schnitte einander gleich. Folglich ist §. 27. AFDGB = HTOKL = 2 HOL.

Zusatz. Da HOL $= \frac{1}{3}$ TL: so ist AFDGB $= \frac{2}{3}$ TL. Demnach beträgt die Halbkugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, welcher mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat; folglich die ganze Kugel $\frac{2}{3}$ eines Cylinders, dessen Grundfläche dem größten Cirkel, und dessen Höhe dem Durchmesser gleich ist.

§. 35.

§. 35.

Aufgabe. Jede Kugel auszumessen.

Es sey der Kugel Halbmesser r, so ist §. 29. ein Cylinder von eben dem Halbmesser und von doppelt so großer Höhe $= 2\, r^3 \pi = \frac{d^3 \pi}{4}$, folglich §. 34. die Kugel als $\frac{2}{3}$ eines solchen Cylinders $= \frac{4}{3} \,.\, r^3 \pi = S = \frac{d^3 \pi}{6}$.

Zusatz. 1. Aus $S = \frac{4}{3} \,.\, r^3 \pi$ folgt $\frac{S}{\pi} \,.\, \frac{3}{4} = r^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{3S}{4\pi}} = r$.

2. Der Inhalt einer andern Kugel, deren Halbmesser ϱ sey s: so ist $s = \frac{4}{3} \,.\, \varrho^3 \pi$; folglich $S : s = r^3 : \varrho^3$, das heißt, die Kugeln sind in cubischer Verhältniß ihrer Halbmesser, oder Durchmesser.

3. Der Halbmesser einer Kugel S sey r, einer Kugel nS sey ϱ: so ist $S : nS = r^3 : \varrho^3$, folglich $\varrho^3 = \frac{n\,S \,.\, r^3}{S} = n \,.\, r^3$, folglich $\varrho = r \,.\, \sqrt[3]{n}$; worauf sich die Verfertigung des Kaliberstabes in der Artillerie gründet.

§. 36.

Aufgabe: Die Körper in einander zu verwandeln.

Man vergleiche die gefundenen Formeln solcher Körper mit einander, und suche daraus die verlangten Bestimmungen. Z. E.

1) Ein Kegel, dessen Halbmesser r, und Höhe a, soll in einen Cylinder, dessen Höhe α vorgeschrieben ist, verwandelt werden: man sucht dessen Halbmesser ϱ.

Da §. 32. der Kegel = $\frac{ar^2\pi}{3}$ und §. 29. der Cylinder $\alpha\varrho^2\pi$: so ist $\frac{ar^2\pi}{3} = \alpha\varrho^2\pi$, folglich $\frac{ar^2}{3\alpha} = \varrho^2$, folglich $r\sqrt{\frac{a}{3\alpha}} = \varrho$.

2) Ein Cylinder $ar^2\pi$ soll in eine Kugel, deren Halbmesser ϱ man sucht, verwandelt werden.

Da §. 35. die Kugel $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$ ist: so ist hier $ar^2\pi = \frac{4}{3}\varrho^3\pi$, folglich $\frac{3}{4}\cdot ar^2 = \varrho^3$, folglich $\sqrt[3]{\frac{3ar^2}{4}} = \varrho$.

3) Die Seite eines Würfels x zu finden, welcher einen andern Würfel, dessen Seite a, nmal enthält.

Hier ist $na^3 = x^3$ folglich $a\sqrt[3]{n} = x$.

Zusatz. Auf diese Art kann man auch jeden Körper in einen Würfel verwandeln oder cubiren.

§. 37.

Die krumme Oberfläche eines geraden Cylinders AC, ist einem Rectangel EG, gleich, dessen Höhe der Höhe des Cylinders, und dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche gleich ist. Fig. 176.

Legt man die Seitenlinie BC des Cylinders an die gleich große Höhe des Rectangels EF: so läßt sich der Cylinder in das Rectangel einwickeln, und wird solches die cylindrische Oberfläche decken, wenn die Grundlinie EH der Peripherie der Grundfläche BA gleich ist.

Zusatz. Die cylindrische Oberfläche ist also einem Cirkel gleich, dessen Halbmesser ϱ, die mittlere Proportionallinie zu des Cylinders Höhe a, und Durchmesser 2r, ist. Denn es ist $\varrho^2\pi = 2ar\pi$, oder $\varrho^2 = 2ar$, folglich $a : \varrho = \varrho : 2r$.

§. 38.

[illegible]

[illegible]

§. [illegible]

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als ein größter Zirkel.

Man denke sich die Oberfläche in so kleine Theile getheilt, daß solche als Ebenen angesehen werden können. Auf jedem Theile denke man sich gerade Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist: so ist die Summe dieser Kegel der Kugel gleich. Nun ist die Höhe dieser Kegel der Halbmesser der Kugel, r, und

§. 38.

Die krumme Oberfläche eines geraden Kegels ABC ist einem Triangel gleich, dessen Höhe der Seitenlinie des Kegels, und dessen Grundlinie der Peripherie der Grundfläche gleich ist. Fig. 177.

Man zeichne mit DE = AC, den Ausschnitt DEF so, daß der Bogen EF der Peripherie der Grundfläche BC gleich sey. Legt man nun die Seitenlinie des Kegels AC an DE: so läßt sich der Kegel in den Ausschnitt einwickeln, so daß solcher die Oberfläche des Kegels deckt. Solcher Ausschnitt aber ist §. 20. einem Triangel gleich, dessen Grundlinie dem Bogen, und dessen Höhe dem Halbmesser des Bogens gleich ist.

Zusatz. 1. Die conische Oberfläche ist also einem Cirkel gleich, dessen Halbmesser ϱ die mittlere Proportionallinie zu des Cylinders Seite a, und Halbmesser r, ist. Denn es ist $\varrho^2\pi = \mathrm{ra}\pi$, oder $\varrho = \mathrm{ra}$, folglich $\mathrm{a} : \varrho = \varrho : \mathrm{r}$. (Denn die Peripherie der Grundfläche ist $2\,\mathrm{r}\pi$, folglich $\mathrm{DEF} = 2\,\mathrm{r}\pi \,.\, \frac{\mathrm{a}}{2} = \mathrm{ra}\pi$.)

2. Die conische Oberfläche $\mathrm{ra}\pi$, verhält sich zu der Grundfläche $\mathrm{r}^2\pi$, wie die Seitenlinie des Kegels a, zum Halbmesser der Grundfläche r.

§. 39.

Die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß als ein größter Cirkel.

Man denke sich die Oberfläche in so kleine Cirkel getheilt, daß solche als Ebenen angesehen werden können. Auf diesen Cirkeln denke man sich gerade Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist: so ist die Summe dieser Kegel der Kugel gleich. Nun ist die Höhe dieser Kegel dem Halbmesser der Kugel, r,

und ihre Grundflächen der Oberfläche der Kugel A gleich. Folglich ist der Inhalt dieser Kegel = $\frac{r \cdot A}{3}$. Nun ist der Inhalt der Kugel = $\frac{4}{3} r^3 \pi$. Folglich ist $\frac{rA}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$, folglich $A = 4 \cdot r^2\pi$.

Zusatz. Die Oberfläche der Kugel $4r^2\pi$ ist also der Oberfläche eines Cylinders gleich, dessen Grundfläche dem größten Cirkel $r^2\pi$, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Denn §. 37. war die Oberfläche des Cylinders = $2ar\pi$. Nun ist hier $a = 2r$. Folglich ist die Oberfläche des Cylinders = $4r^2\pi$ = der Oberfläche der Kugel.

Zwey.

Zweytes Capitel.

Von der Berechnung ebener Triangel, oder die ebene Trigonometrie.

I. Natur der trigonometrischen Linien.

§. 40.

Ziehet man aus der Spitze eines Winkels ACB, mit einem beliebigen Halbmesser CB = CA, einen Cirkelbogen AB, zwischen die Schenkel des Winkels: so heißt der Perpendikel BD, welchen man von dem einen Endpunkte des Bogens B, auf den Schenkel des Winkels fället, der Sinus dieses Winkels oder Bogens; der Perpendikel AK aber, welchen man auf dem Schenkel des Winkels, in dem andern Endpunkte des Bogens A, errichtet, und welcher von dem verlängerten andern Schenkel des Winkels CK, abgeschnitten wird, die Tangente dieses Winkels oder Bogens; ferner das Stück des Schenkels zwischen beyden Perpendikeln, AD, der Sinus versus dieses Winkels oder Bogens; endlich der bis zur Tangente verlängerte andre Schenkel CK, die Secante dieses Winkels oder Bogens. Fig. 178.

Fig. 1. Nennet man den Winkel ACB, sowohl, als den Bogen AB, welcher für den Halbmesser CB = CA, das Maaß des Winkels ist, m: so ist BD = sin. m; AK = tang. m; AD = sin. vers. m; CK = sec. m.

2. Bey einem stumpfen Winkel ACF, dessen Maaß der Bogen AF ist, wäre demnach FG der Sinus; AL die

die Tangente; CL die Secante; AG der Sinus versus, des stumpfen Winkels oder seines Bogens.

3. Bey einem rechten Winkel ACE, dessen Maaß der Quadrant AE, wäre EC der Sinus; AC der Sinus versus; aber AK der CE parallel, folglich Tangente und Secante des rechten Winkels ohne Ende.

§. 41.

Ergänzen zwey Winkel, ACB, BCE, einander zu einem rechten Winkel: so heißt der Sinus des einen der Cosinus des andern; die Tangente des einen die Cotangente des andern; die Secante des einen die Cosecante des andern; der Sinus versus des einen der Cosinus versus des andern. Fig. 178.

Zusatz. 1. Nennet man die Winkel ACB, BCE, sowohl, als ihre Bogen AB, BE, m und n: so ist BM = sin. n = cos. m; EN = tang. n = cotang. m; CN = sec. n = cosec. m; EM = sin. vers. n = cos. vers. m.

2. Da BM = CD: so ist auch CD = cos. m. Nun ist AD = CA — CD, auch sey der Halbmesser CA = r. Folglich ist sin. vers. m = r — cos. m.

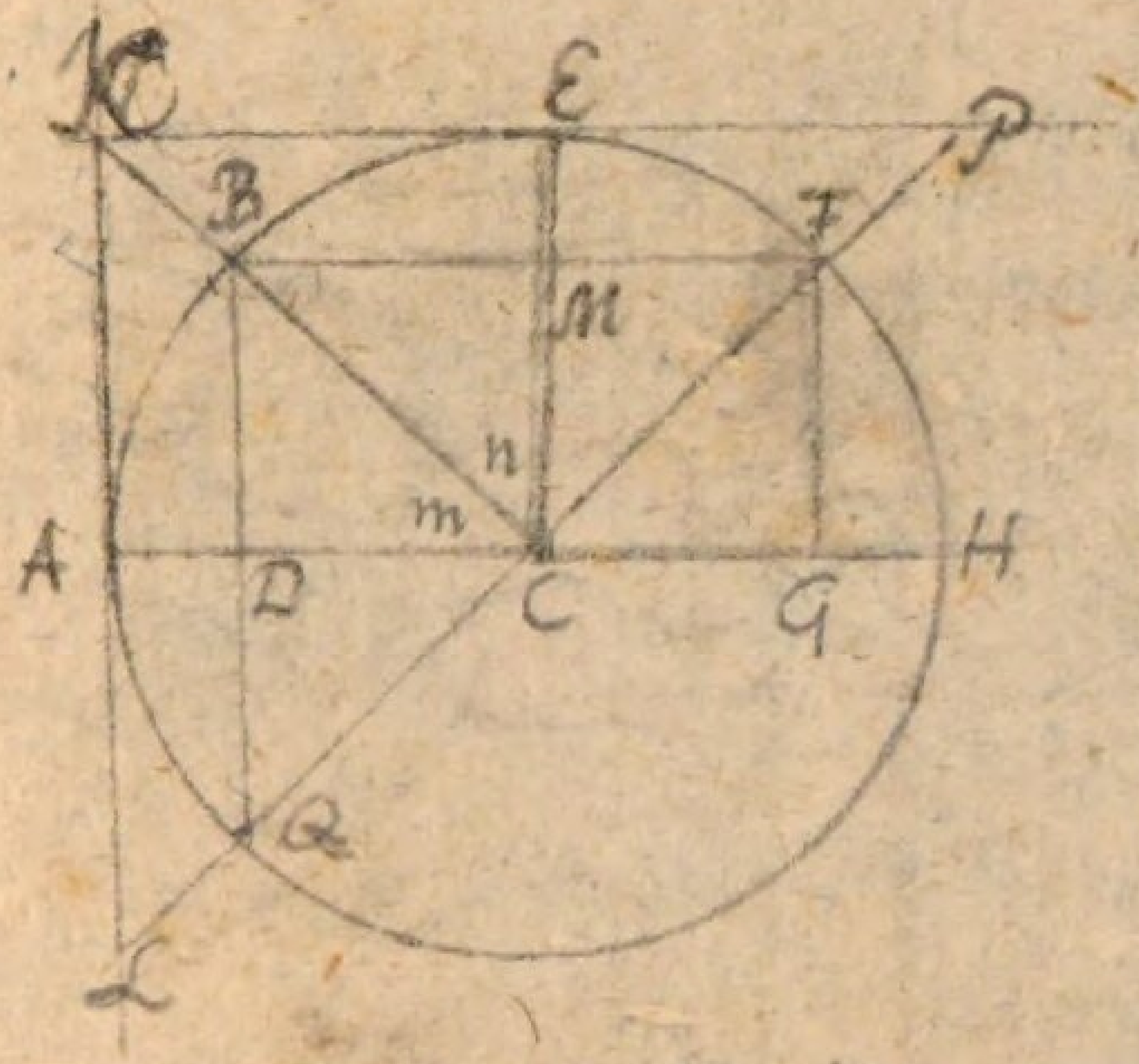
3. Da BD = CM: so ist auch CM = sin. m. Nun ist EM = CE — CM, und CE = r. Folglich ist cos. vers. m = r — sin. m.

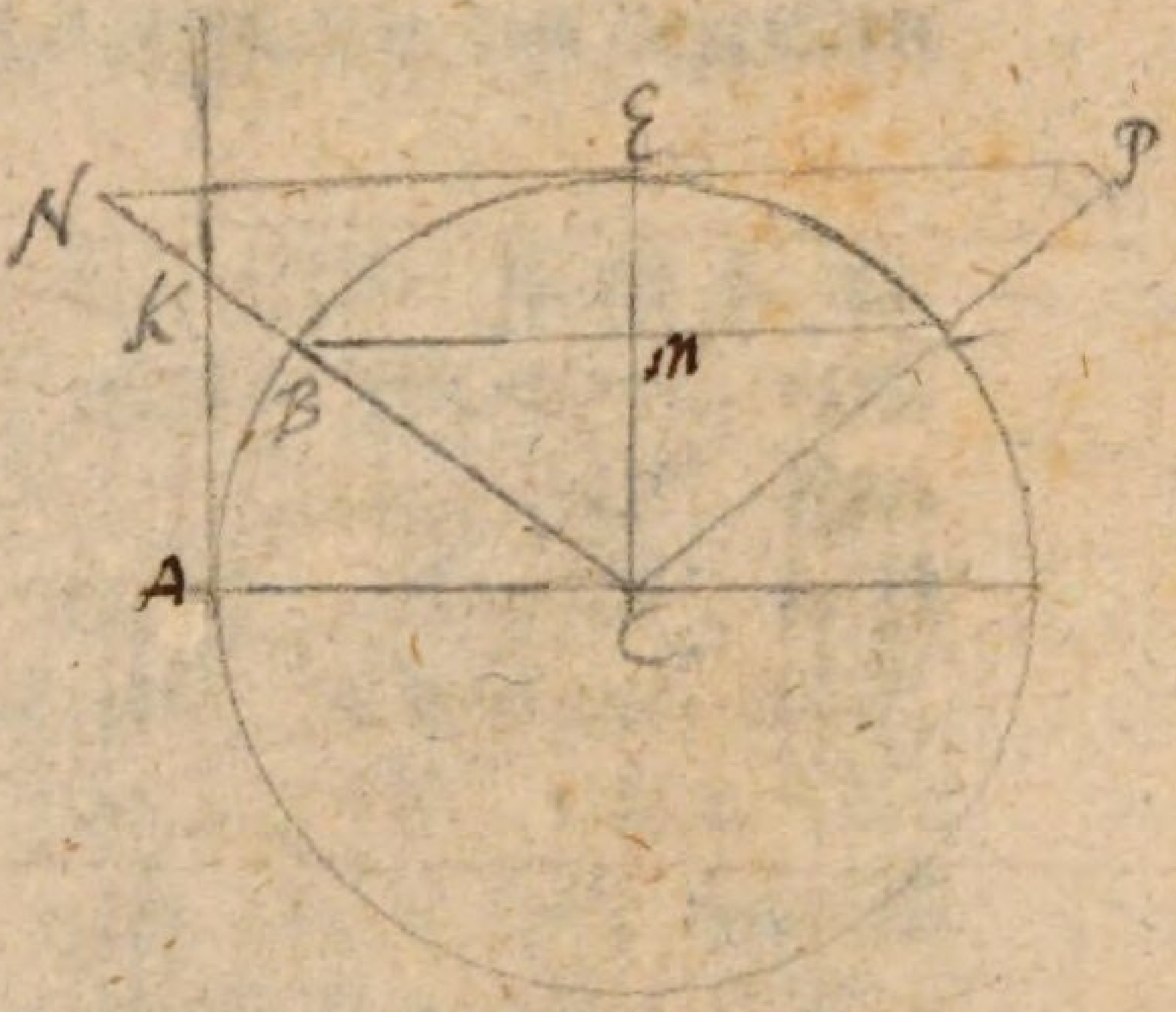
§. 42.

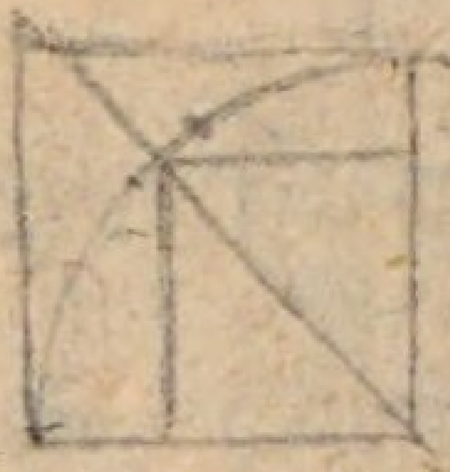
Zu zwey Winkeln ACB, ACF, welche einander zu zwey rechten Winkeln ergänzen, gehören gleich große trigonometrische Linien, nur den Sinus versus ausgenommen. Fig. 178.

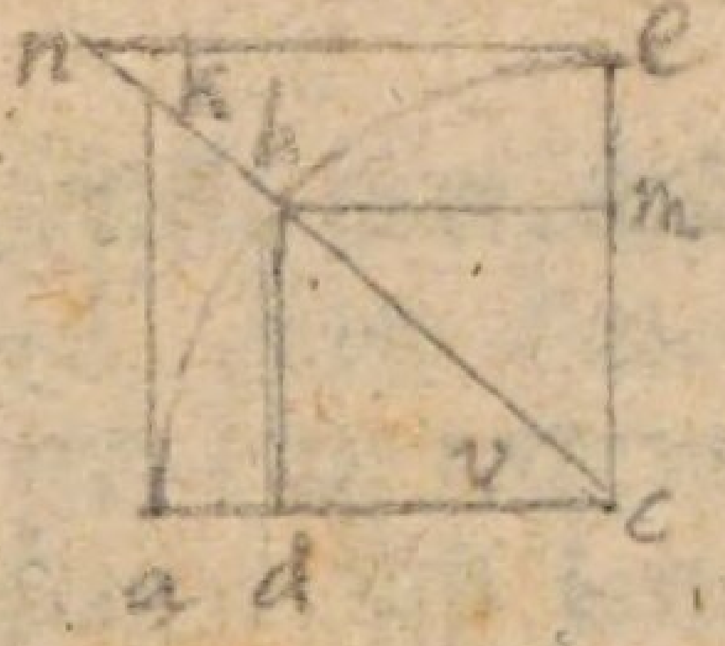
Da ACB + ACF = 2 R: so ist ACB = 2 R. — ACF. Nun ist FCH = 2 R — ACF. Folglich ist ACB = FCH = ACQ, folglich auch BCE = FCE.

Da


K
E
P
B
F
M
n
m
A
D
C
G
H
Q
L


E
P
N
K
m
B
A
C




n
k
h
e
m
v
c
a
d

Da ACB = FCH, CDB = CGF, CB = CF: so ist III. §. 38. BD = FG; folglich sin. ACB = sin. ACF.

Da ACB = ACQ, CAK = CAL, CA = CA: so ist III. §. 38. AK = AL, und CK = CL; folglich tang. ACB = tang. ACF, und sec. ACB = sec. ACF.

Hingegen ist AD = sin. vers. ACB, von AG = sin. vers. ACF, um DG = 2 CD, das ist, um den doppelten Cosinus unterschieden.

Da §. 40. Zus. 2. FG = sin. ACF: so ist §. 41. MF = cos. ACF; EP = cot. ACF; EM = cos. vers. ACF, und daher cos. vers. ACB = cos. vers. ACF. Ferner, da BCE = FCE, CMB = CMF, CB = CF: so ist III. §. 38. MB = MF; folglich cos. ACB = cos. ACF. Endlich, da BCE = FCE, CEN = CEP, CE = CE: so ist III. §. 38. EN = EP, und CN = CP; folglich cot. ACB = cot. ACF, und cosec. ACB = cosec. ACF.

§. 43.

Wenn der spitze Winkel ACB, wächst: so wächst zugleich sein Sinus und Sinus versus, seine Tangente und Secante, so daß, wenn er sich dem rechten Winkel nähert, die beyden ersten Linien sich dem Halbmesser nähern, die beyden letzten aber über alle Grenzen wachsen. Wenn der stumpfe Winkel ACF, wächst: so nimmt sein Sinus, seine Tangente und Secante ab, aber der Sinus versus wächst bis zum doppelten Halbmesser. Beym rechten Winkel ACE, ist der Sinus und Sinus versus dem Halbmesser gleich, welcher daher der Sinus totus heißt; Tangente und Secante aber sind größer als jede gegebene Linie, oder unendlich groß. Fig. 178.

Zusatz. 1. Indem Sinus, Tangente, und Secante wachsen, müssen Cosinus, Cotangente und Cosecante abnehmen;

nehmen; und indem jene abnehmen, müssen diese wachsen. Auch gilt dies von dem Sinus versus und Cosinus versus, nur für den stumpfen Winkel ausgenommen, bey welchem der Cosinus versus zugleich mit dem Sinus versus wächst.

2. Wird der Sinus totus oder Halbmesser r = 1 gesetzt: so lassen sich alle übrige Sinus in Zahlen nicht anders, als durch Brüche ausdrücken.

§. 44.

Alle trigonometrische Linien von gleichen Namen, welche für einerley Winkel m, υ, aber nach verschiedenen Halbmessern CA, ca, oder R, r, gezogen sind, verhalten sich wie diese Halbmesser. Fig. 178. 179.

Da m = υ, so sind die Triangel wie BDC, bdc u. s. w. einander ähnlich; folglich

BD : bd = BC : bc.	oder sin. m : sin. υ = R : r.
AD : ad = AC : ac.	sin. vers. m : sin. vers. υ = R : r.
AK : ak = AC : ac.	tang. m : tang. υ = R : r.
CK : ck = AC : ac.	sec. m : sec. υ = R : r.
BM : bm = BC : bc.	cos. m : cos. υ = R : r.
EM : em = CE : ce.	cos. vers. m : cos. vers. υ = R : r.
EN : en = CE : ce.	cot. m : cot. υ = R : r.
CN : cn = CB : cb.	cosec. m : cosec. υ = R : r.

Zusatz. 1. Demnach behalten auch trigonometrische Linien von verschiednen Namen einerley Verhältniß, wenn sie gleich zu verschiednen Halbmessern, aber einerley Winkel, gehören. Denn es ist z. E. sin. m : sin. υ = tang. m : tang. υ, folglich sin. m : tang. m = sin. υ : tang. υ.

2. Ist eine trigonometrische Linie für den Halbmesser 1, gegeben: so kann man hieraus dieselbe für den Halbmesser R finden; und umgekehrt. Z. E. 1 : R = sin. υ : sin. m; folg-

4.

$$sec. m = \frac{r. Tang. m}{sin. m.}$$

folglich sin. m = sin. υ . R, oder R : 1 = sin. m : sin. υ; folglich sin. $\upsilon = \frac{\text{sin. m}}{R}$.

§. 45.

Aufgabe: Alle trigonometrische Linien durch den Sinus zu bestimmen. Fig. 178.

1. Da BM = CD, und $CD = \sqrt{(CB^2 - BD^2)} = \sqrt{(r^2 - \text{sin. } m^2)}$: so ist $\text{cos. } m = \sqrt{(r^2 - \text{sin. } m^2)}$

2. Da AD = AC — CD: so ist sin. vers. m = r — cos. m. Da AG = AC + CG = r + cos. m: so ist sin. vers. (180° — m) = r + cos. m.

3. Da CD : DB = CA : AK: so ist cos. m : sin. m = r : tang. m; folglich $\text{tang. } m = \frac{r \cdot \text{sin. } m}{\text{cos. } m}$.

4. Da CD : CA = CB : CK: so ist cos. m : r = r : sec. m; folglich $\text{sec. } m = \frac{r^2}{\text{cos. } m}$. Oder da $CK = \sqrt{(CA^2 + AK^2)}$: so ist auch $\text{sec. } m = \sqrt{(r^2 + \text{tang. } m^2)}$.

5. Da EM = CE — CM, und CM = DB, folglich EM = CE — DB: so ist cos. vers. m = r — sin. m.

6. Da CM : MB = CE : EN, und CM = BD: so ist sin. m : cos. m = r : cot. m; folglich $\text{cot. } m = \frac{r \cdot \text{cos. } m}{\text{sin. } m}$. Oder, da $\triangle ACK \sim \triangle CEN$, folglich AK : AC = EC : EN; so ist tang. m : r = r : cot. m; folglich auch $\text{cot. } m = \frac{r^2}{\text{tang. } m}$.

7. Da CM : CE = CB : CN, und CM = BD: so ist sin. m : r = r : cosec. m; folglich $\text{cosec. } m = \frac{r^2}{\text{sin. } m}$. Oder, da $CN = \sqrt{(CE^2 + EN^2)}$: so ist auch $\text{cosec. } m = \sqrt{(r^2 + \text{cot. } m^2)}$

Zusatz. 1. Da sin. tot. = r; alle übrigen Sinus aber kleiner: so sind, wenn man r = 1 setzt, alle Sinus, außer dem Sinus totus, < 1, folglich eigentliche Brüche.

2. Ist ACB = 45°: so ist auch AKC = 45°, folglich AK = AC, folglich tang. 45° = r = 1, und daher alle Tangenten unter 45° < 1, folglich eigentliche Brüche.

3. Nimmt ACB immerfort ab, so daß der Punkt B sich dem Punkte A immer mehr nähert, und endlich auf A fällt, folglich der Winkel o wird: so wird Sinus, Sinus versus, und Tangente o, aber die Secante dem Halbmesser CA gleich.

§. 46.

Der Sinus BD eines Winkels ACB, ist die Hälfte der Sehne BQ, des doppelten Winkels BCQ. Fig. 178.

Da CD senkrecht auf BQ, auch CBD = CQD, und CD = CD: so ist III. §. 38. BD = DQ.

Zusatz. 1. Da III. §. 107. Zus. die Sehne von 60° dem Halbmesser r gleich ist: so ist sin. 30° = $\frac{1}{2}$ r.

2. Auch ist hieraus wenigstens im allgemeinen begreiflich, wie man die Sinustafeln dadurch hat berechnen können, daß man die Sehnen berechnete; und wie man aus solchen nach §. 45. alle übrige trigonometrische Linien berechnen konnte. Für die gefundenen Zahlen war es alsdenn nach II. §. 119. auch möglich, die zugehörigen Logarithmen zu finden. Die Einrichtung solcher trigonometrischen Tafeln, welche man in den im ersten Buche angeführten Sammlungen mathematischer Tafeln noch bequemer abgefaßt findet, fällt beym Anblick in die Augen; nur muß man wissen, daß der Halbmesser, oder Sinus totus, nicht = 1, sondern bey Berechnung der Logarithmen = 10 000 000 000 = R angenommen worden,

den, daher der Logarithmus des Sinus totus = 10 ist. In den gemeinen oder kleinern Tafeln sind aber von den berechneten 10 Ziffern nur 7 mitgetheilt, also der Sinus totus = 10 000 000 = r gesetzt worden, doch hat man bey den Logarithmen die Charakteristik 10 beybehalten. Demnach setzt man nach §. 44. 1 : r = sin. m : sin. tab. m, und r : 1 = sin. tab. m : sin. m; und so auch bey den übrigen Linien, wobey sin. m den Sinus dieses Winkels für den Halbmesser 1; aber sin. tab. m den Sinus dieses Winkels in den Tafeln für den Halbmesser R oder r bedeutet.

3. In den Tafeln findet man die trigonometrischen Linien unmittelbar für alle spitze Winkel, auch für stumpfe Winkel, wenn man ihren Ergänzungswinkel zu 180° nimmt, bis auf die einzelnen Minuten. Sind aber auch Secunden bestimmt: so nimmt man auch hier an, daß sich die Unterschiede der trigonometrischen Linien, wie auch ihrer Logarithmen, wie die Unterschiede der dazu gehörigen Winkel verhalten. Diese Voraussetzung braucht man auch, wenn eine gegebene trigonometrische Linie, oder ihr Logarithmus in den Tafeln nicht genau gefunden wird. Die größern Tafeln erleichtern dergleichen Berechnungen.

4. Auf diesen Lehrsatz gründet sich auch die Einrichtung des sogenannten geradlinichten Transporteurs. Es sey Fig. 180. AC, AB, rechtwinklicht. Aus den Tafeln nehme man den Sinus von $2\frac{1}{2}$ Grad doppelt, und trage solchen nach einem tausendtheiligen Maaßstabe auf AC aus A in 5, so ist A . 5 die Sehne von 5 Grad. Auf eben die Art trage man auf BD aus B in 10 den doppelten Sinus von 5 Grad: so ist B . 10 die Sehne von 10 Grad. Eben so sey A . 15 die Sehne von 15 Grad, und so weiter wechselsweise bis zur Sehne von 90 Grad. Nun theile man AB in 5 gleiche Theile, und ziehe die Transversallinien B . 5, 5 . 10, 10 . 15 u. s. w. für die einzelnen Grade, wie beym verjüngten Maaßstabe. Soll nun ein Winkel von n Grad aufgetragen werden: so ziehe man

aus der Spitze mit der Sehne von 60 Grad, oder dem Halbmesser, einen Bogen, und schneide auf demselben die Sehne von n Grad ab. Da aber nur die unmittelbar aufgetragenen Sehnen einigermaßen richtig sind: so leistet der tausendtheilige Maaßstab solche Dienste viel genauer, wenn man statt der Sehne von 60 Grad 1000 vom Maaßstabe, und aus den Tafeln den doppelten sin. $\frac{1}{2}$ m nimmt, wenn der aufzutragende Winkel m ist.

Anmerkung. Auf dem Proportionalcirkel findet man neben der arithmetischen Linie, auch die Sinus- Tangenten- Secantenlinie = a. Ist nun a der Halbmesser eines Cirkels, folglich der Sinus von 90 Grad: so ist $\frac{1}{2}$ a der Sinus von 30 Grad, und man kann, wenn die Sinus für diesen Halbmesser a aufgetragen sind, solche nun für jeden Halbmesser bey gehöriger Oefnung des Proportionalcirkels finden. Ist a der Durchmesser eines Cirkels: so ist $\frac{1}{2}$ a die Tangente von 45 Grad, und $\frac{1}{2}$ a die Secante von 0 Grad, und man kann wenn die Tangenten und Secanten für diesen Halbmesser $\frac{1}{2}$ a aufgetragen sind, solche für jeden Halbmesser bey gehöriger Oefnung des Proportionalcirkels finden. Ist auf dem Proportionalcirkel auch eine Linie für die Sehnen aufgetragen: so hat solche vor dem geradelinichten Transporteur und dem 1000theiligen Maaßstabe noch die Bequemlichkeit zum voraus, daß man den Halbmesser, oder die Sehne von 60 Grad, womit man bey Auftragung der Winkel den Bogen ziehet, so klein als man will annehmen kann.

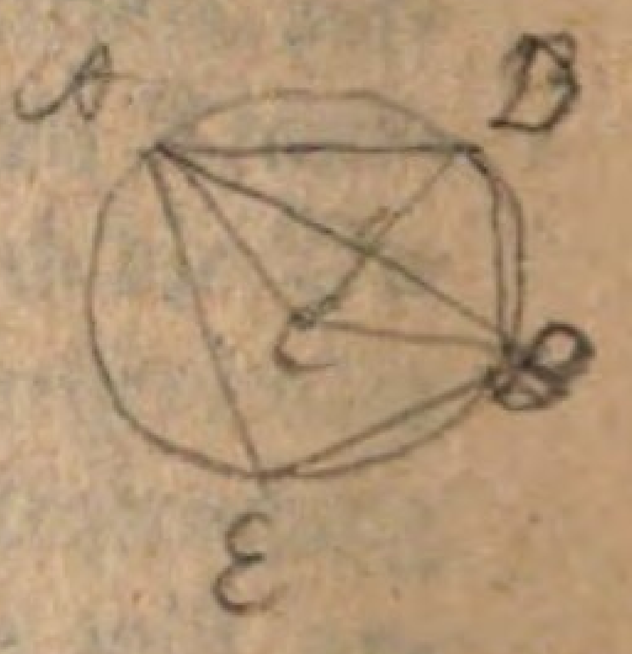
II. Lehren zur Berechnung ebener Triangel.

§. 47.

In jedem rechtwinklichten Triangel ACK, verhalten sich die Seiten wie die Sinus der entgegengesetzten

[illegible]

Anmerkung. [illegible]



II. Lehren zur Berechnung kleiner Triangel.

§. 47.

In jedem rechtwinklichten Triangel ACB, verhalten sich die Seiten wie die Sinus der entgegengesetzten

Winkel

setzten Winkel; auch verhält sich die eine Cathete zur andern, wie der Sinus totus zur Tangente des der andern Kathete entgegengesetzten Winkels. Fig. 178.

Aus C ziehe man mit CA den Bogen AB, und BD der AK parallel: so ist CB : BD = CK : KA. Nun ist CB : BD = sin. tot. : sin. KCA. Folglich ist auch CK : KA = sin. tot. : sin. KCA. Ferner ist CD : DB = CA : AK. Nun ist CD : DB = cos. KCA : sin. KCA, und cos. KCA = sin. AKC, daher CD : DB = sin. AKC : sin. KCA. Folglich ist CA : AK = sin. AKC : sin. KCA. Nun war AK : CK = sin. KCA : sin. tot. Folglich ist auch CA : CK = sin. AKC : sin. tot.

Auch ist offenbar CA : AK = sin. tot. : tang. ACK. Wäre KA der Halbmesser, so wäre eben so KA : AC = sin. tot. : tang. AKC. Alsdenn ist die Hypothenuse CK die Secante, im ersten Falle von ACK, im zweyten von AKC.

§. 48.

In jedem Triangel ABD, verhalten sich die Seiten wie die Sinus der entgegengesetzten Winkel. Fig. 181.

Um den Triangel ABD beschreibe man einen Cirkel, und ziehe CA, CD, CB. Da $\frac{1}{2}$ AD = sin. $\frac{1}{2}$ ACD, $\frac{1}{2}$ DB = sin. $\frac{1}{2}$ DCB, und $\frac{1}{2}$ AB = sin. $\frac{1}{2}$ ACB; aber III. §. 85. ABD = $\frac{1}{2}$ ACD; DAB = $\frac{1}{2}$ DCB; und AEB = $\frac{1}{2}$ ACB: so ist $\frac{1}{2}$ AD = sin. ABD, $\frac{1}{2}$ DB = sin. DAB, und $\frac{1}{2}$ AB = sin. AEB, oder weil III. §. 87. AEB + ADB = 2 R. §. 42. $\frac{1}{2}$ AB = sin. ADB. Demnach ist sin. ABD : sin. DAB = $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ DB = AD : DB; sin. DAB : sin. ADB = $\frac{1}{2}$ AD : $\frac{1}{2}$ AB = DB : AB; und sin. ABD : sin. ADB = AD : AB.

§. 49.

Von zwey ungleichen Größen, a, b, besteht die größere a, aus der halben Summe, und der halben Differenz beyder Größen, $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$; und die kleinere aus der halben Summe, weniger der halben Differenz beyder Größen, $\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

Da II. §. 21. $(a+b)+(a-b)=2a$: so ist $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}=\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$. Da auch II. §. 26. $(a+b)-(a-b)=2b$: so ist $b=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$.

§. 50.

In jedem Triangel ABC, verhält sich die Summe zweyer Seiten, AC + CB, zu ihrer Differenz, AC — CB, wie die Tangente der halben Summe der entgegengesetzten Winkel, $\frac{1}{2}(B+A)$, zur Tangente ihrer halben Differenz, $\frac{1}{2}(B-A)$. Fig. 182.

Man verlängre AC, mache CD = CB = CE, und ziehe BE: so ist AD = AC + CB, und AE = AC — CB, auch III. §. 93. DBE ein rechter Winkel, und III. §. 46. DCB = B + A = 2 CEB, daher CEB = $\frac{1}{2}(B+A)$. Ziehet man nun AF der BE parallel: so ist CAF = CEB = $\frac{1}{2}(B+A)$. Nun ist §. 49. CAB = $\frac{1}{2}(B+A)-\frac{1}{2}(B-A)$ = CAF — BAF. Folglich ist BAF = $\frac{1}{2}(B-A)$.

Verlängert man DB bis sie die AF in F schneidet: so ist DFA = DBE = R. Folglich ist §. 47. für den Halbmesser AF, die FD = tang. CAF = tang. $\frac{1}{2}(B+A)$, und die FB = tang. BAF = tang. $\frac{1}{2}(B-A)$. Nun ist III. §. 116. AD : AE = FD : FB. Folglich ist AC + CB : AC — CB = tang. $\frac{1}{2}(B+A)$: tang. $\frac{1}{2}$ B — A).

§. 51.

§. 51.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, dessen Seiten bekannt sind, wird von der Spitze eines Winkels A, auf die entgegengesetzte Seite BC, ein Perpendikel AD, gefällt; man soll die beyden Abschnitte dieser Seite, CD, DB, finden. Fig. 183.

Man mache DE = DB, beschreibe aus A mit AB einen Cirkel, welcher CA in F schneidet, und verlängre CA nach G: so ist CG = CA + AB, und CF = CA — AB. Nun ist III. §. 147. BC : CG = CF : CE. Folglich ist BC : CA + AB = CA — AB : CE, und daher CE bestimmt. Auch ist EB = CB — CE, und daher DB = $\frac{1}{2}$ EB bestimmt.

III. Aufgaben für die Berechnung ebener Triangel.

§. 52.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Winkel, nebst einer Seite, gegeben; man soll die beyden übrigen Seiten berechnen. Fig. 183.

Sind zwey Winkel bekannt: so ist es auch der dritte; und es ist, wenn irgend eine Seite AB gegeben ist, §. 48. sin. C : AB = sin. B : AC = sin. A : BC.

§. 53.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten, nebst einem Winkel, welcher einer dieser Seiten entgegengesetzt ist, gegeben; man soll einen von den übrigen Winkeln berechnen. Fig. 183.

Wäre z. E. CA, AB, und der Winkel B, gegeben, so ist §. 48. CA : sin. B = AB : sin. C.

Zusatz. Ob der Winkel C, stumpf, oder spitz seyn müsse, läßt sich leicht aus den Umständen abnehmen.

§. 54.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind zwey Seiten, AC, CB, nebst dem eingeschlossenen Winkel C, gegeben; man soll einen von den übrigen Winkeln berechnen. Fig. 183.

Da $B + A = 180^\circ - C$: so hat man auch $\frac{1}{2}(B + A) = 90 - \frac{1}{2} C$. Nun ist §. 50. $AC + CB : AC - CB = \text{tang.} \frac{1}{2} (A + B) : \text{tang.} \frac{1}{2} (A - B)$, und man hat §. 49. $A = \frac{1}{2} (A + B) + \frac{1}{2} (A - B)$.

Zusatz. Wäre der eingeschlossene Winkel C, ein rechter: so gäbe §. 47. eine leichtere Auflösung.

§. 55.

Aufgabe: In einem Triangel ABC, sind die drey Seiten gegeben; man soll einen der drey Winkel berechnen. Fig. 183.

Man fälle den Perpendikel AD, suche §. 51. den Abschnitt DB: so hat man in dem $\triangle$ ADB, den rechten Winkel D, und die beyden Seiten DB, BA, und findet §. 47. oder 53. den Winkel B.

Anmerkung. Wie zur Berechnung der trigonometrischen Aufgaben die logarithmischen und trigonometrischen Tafeln zu gebrauchen sind, erhellet genugsam aus §. 46. Zus. 2. 3. und aus der Lehre von den Logarithmen, wovon eine Wiederholung überflüßig seyn würde.

Drittes Kapitel.

Von der Berechnung körperlicher Triangel, oder die sphärische Trigonometrie.

I. Natur der sphärischen Triangel.

§. 56.

Jede zwey größte Cirkel, PAQ, PDQ, schneiden einander im Durchmesser der Kugel, PQ, und halbiren daher einander. Fig. 184.

Da III. §. 157. zwey Ebenen einander in einer geraden Linie schneiden, und III. §. 198. ein größter Cirkel durch den Mittelpunkt der Kugel C, gehet: so muß III. §. 196. der Durchschnitt zweyer größter Cirkel der Durchmesser der Kugel seyn. Nun ist III. §. 196. der Durchmesser der Kugel auch der Durchmesser des größten Cirkels. Folglich halbiren die größten Cirkel einander, so daß PAQ, PBQ, PDQ, halbe Cirkel sind.

Zusatz. 1. Durch jede zwey Punkte auf der Oberfläche der Kugel, und durch den Mittelpunkt der Kugel, wird III. §. 156. die Lage eines größten Cirkels bestimmt.

2. Von jedem Punkte auf der Oberfläche der Kugel läßt sich III. §. 165. auf jeden gegebenen größten Cirkel ein Perpendikel fällen, und durch solchen Perpendikel, und den Mittelpunkt der Kugel, ein andrer größter Cirkel legen, dessen Lage hiedurch bestimmt ist, und welcher III. §. 172. auf dem gegebenen größten Cirkel senkrecht ist.

§. 57.

Die Peripherie eines größten Cirkels ADB, stehet in allen Punkten von seinem Pol P, um den Quadranten PD, eines größten Cirkels PDQ, ab. Fig. 184.

Verbindet man den Pol mit dem Mittelpuncte mittelst der geraden Linie PC: so ist III. §. 199. solche auf dem Cirkel ADB, folglich auch III. §. 154, 2. auf der geraden Linie CD senkrecht, folglich PCD ein rechter Winkel, und PD ein Quadrant.

Zusatz. Da PC senkrecht, so ist III. §. 172. auch PCD senkrecht auf ADB; und überhaupt jeder größte Cirkel durch den Pol eines andern auf diesen andern senkrecht.

§. 58.

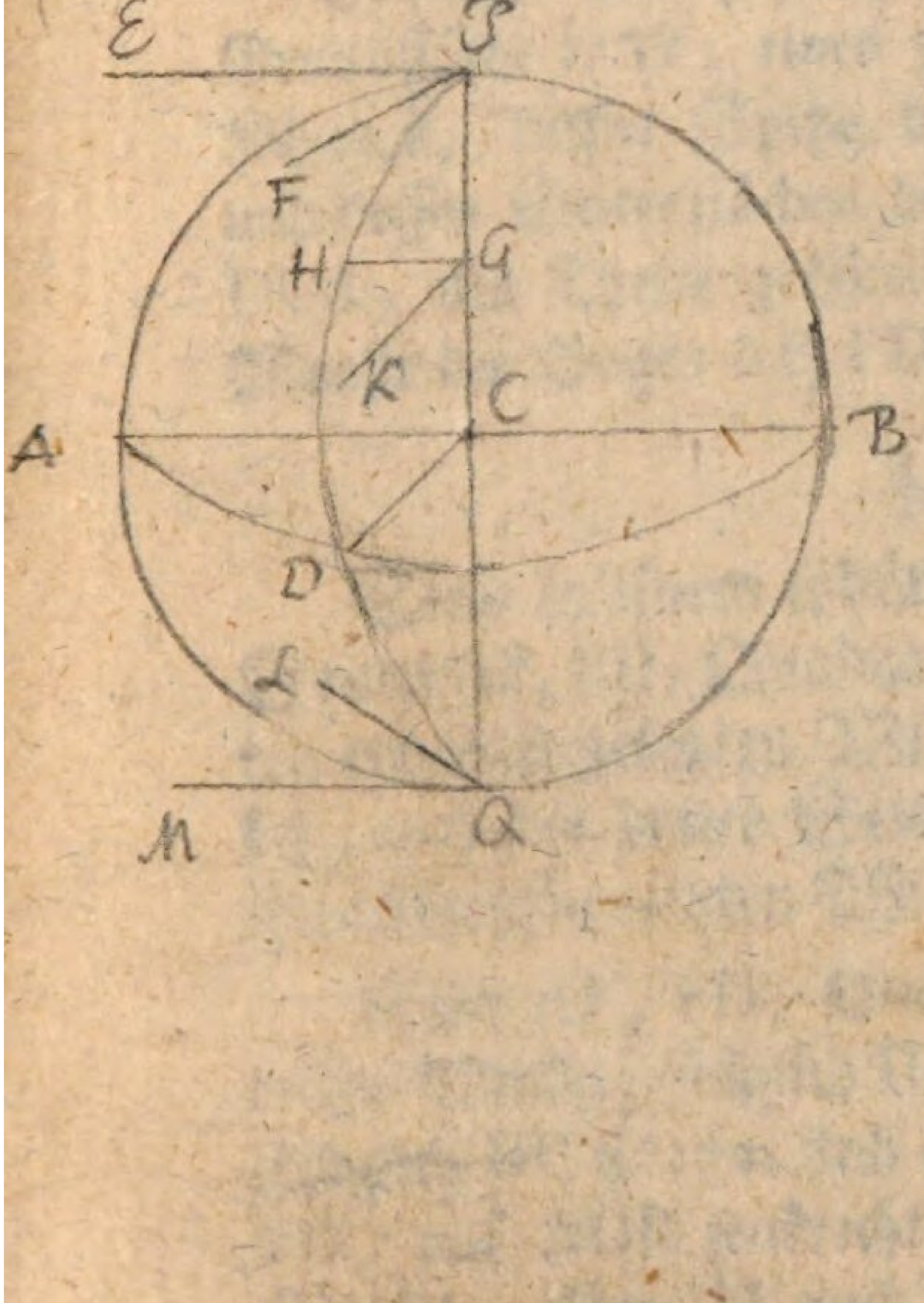
Ein sphärischer Winkel APD, ist die Neigung zweyer größten Cirkel gegen einander, oder die Neigung zweyer Bogen größter Cirkel AP, PD, auf der Oberfläche der Kugel, gegen einander. Fig. 184.

Zusatz. 1. Das Maaß eines sphärischen Winkels ist daher III. §. 154, 6. jeder ebene Winkel, welcher auf dem Durchschnitte PQ der beyden größten Cirkel senkrecht ist, wie EPF, oder LQM, oder HGK, oder ACD, oder auch der Bogen dieses Winkels AD, welcher der Bogen eines größten Cirkels ist, der von der Spitze des sphärischen Winkels P, in allen Punkten um einen Quadranten abstehet.

2. Jede sphärische Nebenwinkel APD, DPB, deren Maaß die Bogen AD, DB, sind zusammen zwey rechten Winkeln gleich.

3. Daher sind auch jede sphärischen Verticalwinkel ADQ, PDB, einander gleich.

4. Ein


E
P
F
H
G
K
C
A
B
D
L
M
Q

4. Ein größter Cirkel PDQ, ist auf einen andern ADB, senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ACD, ein rechter Winkel ist, das ist, §. 75. Zus. wenn er durch den Pol P des Cirkels ADB gehet.

§. 59.

Ein sphärischer Triangel DAP, ist ein Theil der Oberfläche einer Kugel, welcher von drey Bogen größter Cirkel DA, AP, PD, begrenzt wird. Diese Bogen heißen die Seiten, und die sphärischen Winkel, welche von den Seiten eingeschlossen werden, die Winkel des sphärischen Triangels. Fig. 184.

Zusatz. Ein sphärischer Triangel ist die sphärische Grundfläche DAP, eines pyramidenförmigen dreyseitigen Körpers, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel C, und dessen Seitenflächen die ebenen Winkel ACP, PCD, DCA, als Theile größter Cirkel sind, welche zu ihrem Maaße die Bogen AP, PD, DA, haben.

§. 60.

Sind in einem sphärischen Triangel, PAD, zwey Seiten AP, PD, Quadranten: so sind die solchen Seiten entgegengesetzten Winkel ADP, DAP, rechte Winkel, und die dritte Seite AD, das Maaß des dritten ihr entgegengesetzten Winkels APD. Fig. 184.

Sind AP, PD, Quadranten: so sind ACP, DCP, rechte Winkel; folglich III. §. 158. PC senkrecht auf ADB. Folglich III. §. 172. sind auch die Ebenen der Bogen AP, PD, auf ADB senkrecht, und daher ADP, PAD rechte Winkel. Nun ist auch P der Pol von ADB. Folglich ist §. 58. Zus. 1. der Bogen AD das Maaß des Winkels APD.

Zusatz. 1. Wäre AD auch ein Quadrant: so wäre APD, auch ein rechter Winkel. Wäre, wie in dem

Trian-

Triangel PDB, die dritte Seite DB größer als ein Quadrant: so ist DPB größer, als ein rechter Winkel.

2. Ein sphärischer Triangel heißt rechtwinklicht, der einen rechten Winkel hat, schiefwinklicht, worinn kein rechter Winkel ist.

Anmerkung. In einem sphärischen Triangel beträgt die Summe der Winkel allemal mehr als zwey rechte Winkel; ja sie kann wohl gegen sechs rechte Winkel sich belaufen. Die Summe der drey Seiten ist III. §. 176. kleiner als vier Quadranten. Jede zwey Seiten sind III. §. 177. zusammen größer als die dritte. Triangel, worinn alle, oder zwey Winkel, rechte Winkel sind, bedürfen keiner besondern Auflösung.

II. Berechnung rechtwinklichter sphärischer Triangel.

§. 61.

Aufgabe: Einen rechtwinklichten sphärischen Triangel mit den zugehörigen Bestimmungen zu zeichnen. Fig. 185.

1. Es sey der Cirkel AFEB die Grundfläche einer Halbkugel, und werde von einem andern größten Cirkel ADPE, senkrecht in AE geschnitten. Ein dritter größter Cirkel BDLF schneide gleichfalls den ersten unter einem spitzen Winkel in BF. Der Durchschnitt des dritten mit dem zweyten sey CD: so ist ADB ein rechtwinklichter sphärischer Triangel, oder ADBC ein pyramidenförmiger dreyseitiger Körper, dessen Seitenflächen die ebenen Winkel ACD, DCB, BCA, sind, welche die Seiten des sphärischen Triangels AD, DB, BA, zu ihrem Maaße haben; und zwar ist A der rechte Winkel, B und D aber die schiefen Winkel, BD, die Hypothenuse, DA, AB, die Perpendikel. Für den einen schiefen Winkel B heiße BA

der

der anliegende, und AD der entgegengesetzte Perpendikel; für den andern schiefen Winkel D aber heiße DA der anliegende, und AB der entgegengesetzte Perpendikel. Eben so heißt auch von den schiefen Winkeln der eine der anliegende, der andre der entgegengesetzte.

2. Von D in der senkrechten Ebene ADFE, fälle man auf die Ebene ABE den Perpendikel DG: so trift solcher III. §. 173. die Durchschnittslinie AE in G. In der Ebene ABE, fälle man von G, auf die Linie BF, den Perpendikel GH, und ziehe HD: so ist DGH ein rechter Winkel, die Ebene DGH auf der Ebene ABE senkrecht, und daher auch DH auf BF senkrecht. Demnach entsteht eine dreyseitige Pyramide DGHC, welche von den rechtwinklichten Triangeln DGH, DGC, DHC, GHC, begrenzt wird; auch haben die ebenen Winkel, welche den körperlichen Winkel der Spitze einschließen, die Seiten des sphärischen Triangels AD, DB, BA, zu ihrem Maaße, und es ist §. 58. DHG = ABD.

3. Halbirt man die halben Cirkel BAF, BDF, in K, L, und legt durch solche einen größten Cirkel KLP, welcher den Cirkel ADE in P trift: so sind BK, BL, Quadranten, welche §. 60. bey K und L rechte Winkel machen; daher B der Pol des Cirkels KLP, folglich §. 58. KL das Maaß des Winkels ABD. Eben so beweist man, weil bey A und K rechte Winkel sind, daß PA, PK Quadranten sind, und P der Pol des Cirkels AK, folglich AK das Maaß des Winkels LPD ist.

4. Der hiedurch entstandne sphärische Triangel LPD ist dem zuerst angenommenen sphärischen Triangel ADB, völlig zugehörig. Denn A = L, weil BL auf KP senkrecht; D = D, weil es Verticalwinkel; KL das Maaß des Winkels B, ist das Complement von LP zu einem Quadranten; AK ist das Complement von BA, und das Maaß des Winkels P; von AD ist das Complement DP; endlich von BD ist das Complement DL.

§. 62.

§. 62.

In jedem rechtwinklichten sphärischen Trianzel ADB, Fig. 185. ist

1. der Halbmesser zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus des einen schiefen Winkels, zum Sinus des entgegengesetzten Perpendikels; oder r : sin. BD = sin. B : sin. AD.

2. Der Halbmesser zur Tangente der Hypothenuse, wie der Cosinus des einen schiefen Winkels zur Tangente des anliegenden Perpendikels; oder r : tang. BD = cos. B : tang. BA.

3. Der Halbmesser zur Tangente des einen schiefen Winkels, wie der Sinus des anliegenden zur Tangente des entgegengesetzten Perpendikels; oder r : tang. B = sin. BA : tang. AD.

4. Der Halbmesser zum Cosinus des einen Perpendikels, wie der Cosinus des andern zum Cosinus der Hypothenuse, oder r : cos. BA = cos. AD : cos. DB.

5. Der Halbmesser zum Cosinus des einen Perpendikels, wie der Sinus des anliegenden zum Cosinus des entgegengesetzten schiefen Winkels; oder r : cos. AD = sin. D : cos. B.

6. Der Halbmesser zum Cosinus der Hypothenuse: wie die Tangente des einen zur Cotangente des andern schiefen Winkels; oder r : cos. BD = tang. D : cot. B.

In △DCG sey CD der Halbmesser: so ist DG = sin. DCG, und daher CD : DG = r : sin. DCG. Im △DHG sey HD der Halbmesser: so ist DG = sin. DHG, und daher DG : HD = sin. DHG : r. Folglich ist CD : HD = sin. DHG : sin. DCG. Nun sey im △DCH, CD der Halbmesser: so ist DH = sin. DCH, und daher

CD

CD : DH = r : ſin. DCH. Folglich iſt r : ſin. DCH = ſin. DHG : ſin. DCG; folglich r : ſin. BD = ſin. B : ſin. AD. (§. 61, 2).

Eben ſo, wenn CH der Halbmeſſer, iſt GH = tang. GCH, und daher CH : GH = r : tang. GCH. Iſt DH der Halbmeſſer: ſo iſt GH = coſ. DHG, und daher GH : DH = coſ. DHG : r. Folglich iſt CH : DH = coſ. DHG : tang. GCH. Nun iſt, wenn CH der Halbmeſſer, auch DH = tang. DCH, und daher CH : DH = r : tang. DCH. Folglich iſt r : tang. DCH = coſ. DHG : tang. GCH; folglich r : tang. BD = coſ. B : tang. BA.

Eben ſo, wenn CG der Halbmeſſer, iſt GH = ſin. GCH, und daher GH : CG = ſin. GCH : r. Iſt CG der Halbmeſſer; ſo iſt DG = tang. DCG, und daher CG : DG = r : tang. DCG. Folglich iſt GH : DG = ſin. GCH : tang. DCG. Nun iſt, wenn GH der Halbmeſſer, DG = tang. DHG, und daher GH : DG = r : tang. DHG. Folglich iſt r : tang. DHG = ſin. GCH : tang. DCG; folglich r : tang. B = ſin. BA : tang. AD.

Im rechtwinklichten ſphäriſchen Triangel LPD iſt nach dem erſten Geſetze r : ſin. PD = ſin. P : ſin. LD. Nun iſt §. 61, 4. ſin. PD = coſ. AD; ſin. P = coſ. BA; ſin. LD = coſ. DB. Folglich iſt r : coſ. AD = coſ. BA : coſ. DB; folglich r : coſ. BA = coſ. AD : coſ. DB.

Eben ſo iſt in dieſem Triangel nach dem erſten Geſetze r : ſin. PD = ſin. D : ſin. PL. Nun iſt ſin. PD = coſ. AD; ſin. D = ſin. D; ſin. PL = coſ. KL = coſ. B. Folglich iſt r : coſ. AD = ſin. D : coſ. B.

Endlich iſt nach dem dritten Geſetze r : tang. D = ſin. DL : tang. PL. Nun iſt ſin. DL = coſ. BD, und tang.

tang. PL = cot. KL = cot. B. Folglich ist r : tang. D = cos. BD : cot. B; folglich r : cos. BD = tang. D : cot. B.

Zusatz. 1. Wendete man das dritte Gesetz auch auf den Winkel P, und das zweyte auf den Winkel D und P an: so würde man noch drey andere Gesetze erhalten, welche aber nichts neues gäben.

2. Alle diese Gesetze lassen sich auch auf den rechtwinklichten Triangel DEF, anwenden, worinn zwey Seiten die Complemente der beyden Seiten des erstern Triangels DAB, zu zwey Quadranten sind; wozu es also nöthig zu bestimmen ist, von welcher Gattung die nach solchen Gesetzen berechneten Seiten und Winkel seyn müssen, ob sie nämlich zu spitzen oder stumpfen Winkeln gehören.

§. 63.

In jedem rechtwinklichten sphärischen Triangel sind die Perpendikel mit ihren entgegengesetzten Winkeln, und die Winkel mit den entgegengesetzten Perpendikeln von einerley Gattung. Fig. 185.

Im Triangel ADB ist AD kleiner als ein Quadrant AP, und KL das Maaß des Winkels B, kleiner als der Quadrant KP. Im Triangel EDB ist ED größer als der Quadrant EP, und der Winkel EBD größer als ein rechter Winkel, weil sein Nebenwinkel DBA, kleiner ist. Auf eben die Art beweist man auch den umgekehrten Satz.

§. 64.

In jedem rechtwinklichten Triangel, ist die Hypothenuse kleiner oder größer als ein Quadrant, je nachdem die beyden Perpendikel, oder die beyden schiefen Winkel, oder der eine Perpendikel mit dem anliegenden Winkel von einerley oder von verschiedener Gattung sind. Auch sind die genannten Stücke von einerley oder verschiedener Gattung, je nachdem die Hypothe-

[illegible]

§. 64.

[illegible]

thenuse kleiner, oder größer als ein Quadrant ist. Fig. 185.

Durch M, den Pol des größten Cirkels ADPE, und durch D, lege man einen größten Cirkel DM. Sind nun in dem Triangel ADB, beyde Perpendikel DA, AB, kleiner als Quadranten: so ist §. 63. in dem Triangel ADM, der Winkel M kleiner als ein rechter, und daher BD kleiner als ein Quadrant. Sind eben so in dem Triangel EDB beyde Perpendikel DE, EB, größer als Quadranten: so ist §. 63. DME größer, folglich DMA kleiner als ein rechter Winkel, und daher BD kleiner als ein Quadrant.

Durch D und einem willkürlichen Punkt N zwischen M und E, lege man einen größten Cirkel DN. Sind nun DA, AN, oder DE, EN, von verschiedener Gattung: so zeigt man auf eben die Art, daß alsdann DN größer als ein Quadrant sey.

Auf eben den Gründen beruhet der Beweiß des umgekehrten Satzes.

Anmerkung. Sollten ohngeachtet §. 63. 64. noch Zweydeutigkeiten übrig bleiben: so muß man solche aus den Umständen der Sache heben.

§. 65.

Aufgabe: In einem rechtwinklichten sphärischen Triangel ABD, sind außer dem rechten Winkel zwey Stücke gegeben: man soll die übrigen berechnen. Fig. 185.

Da in dem Triangel außer dem rechten Winkel nur noch 5 Stücke, die Hypothenuse, die beyden Perpendikel, und die beyden schiefen Winkel enthalten sind; und man von diesen 2 Stücke giebt, und 1 Stück sucht: so berechne man letzteres nach demjenigen Gesetze, des §. 62. in welchem die beyden gegebenen Stücke nebst dem ge-

suchten enthalten sind, dergestalt, daß wenn das gesuchte eines der mittlern, oder eines der äußern Glieder der Proportion ist, man im ersten Falle die Logarithmen der äußern Glieder addirt, und von solcher Summe den Logarithmus des andern mittlern Gliedes subtrahirt; im andern Falle aber, die Logarithmen der mittlern Glieder addirt, und von solcher Summe den Logarithmus des andern äußern Gliedes subtrahirt. Sollten hiebey Zweydeutigkeiten vorkommen: so hebt man solche nach §. 63. 64. oder nach den Umständen.

Daß aber für alle dergleichen Aufgaben die sechs Gesetze des §. 62. hinreichen, ist leicht zu übersehen, da ausser folgenden 6 Fällen kein andrer möglich ist. Denn man verbindet

1. Die Hypothenuse mit beyden Perpendikeln, nach dem vierten Gesetze.

2. Die Hypothenuse mit den beyden Winkeln, nach dem sechsten Gesetze.

3. Die Hypothenuse mit einem Perpendikel und dem anliegenden Winkel, nach dem zweyten Gesetze.

4. Die Hypothenuse mit einem Perpendikel, und dem entgegengesetzten Winkel, nach dem ersten Gesetze.

5. Beyde Perpendikel mit einem Winkel, nach dem dritten Gesetze.

6. Beyde Winkel mit einem Perpendikel, nach dem fünften Gesetze.

Anmerkung. 1. Auch auf folgende Art läßt sich die Sache übersehen. Es sind nämlich von besagten 5 Stücken

I. 3 Seiten num. 1.

II. 2 Seiten und ein Winkel, und zwar

1) 2

1) 2 Perpendikel und 1 Winkel. num. 5.

2) Die Hypothenuse und ein Perpendikel nebst

a) dem entgegengesetzten Winkel. num. 4.

b) dem anliegenden Winkel. num. 3.

III. 1 Seite und 2 Winkel, nämlich

1) die Hypothenuse. num. 2.

2) Ein Perpendikel. num. 6.

2. Sind in dem aufzulösenden rechtwinklichten sphärischen Triangel einige Seiten größer als Quadranten, und einige Winkel stumpf: so kann man füglich anstatt desselben seinen Nebentriangel auflösen, dessen Seiten und Winkel die Ergänzung zu zwey Quadranten oder zwey rechten Winkeln sind.

III. Berechnung schiefwinklichter sphärischer Triangel.

§. 66.

Lehrsatz. Bey jeden zwey Bogen eines Cirkels, AB, BD, verhält sich die Summe ihrer Sinus zur Differenz, wie die Tangente der halben Summe der Bogen zur Tangente der halben Differenz; oder $\sin. AB + \sin. BD : \sin. AB - \sin. BD = \text{tang.} \frac{AB + BD}{2} : \text{tang.} \frac{AB - BD}{2}$. Fig. 186.

Halbirt man den Bogen $AD = AB + BD$ in E: so ist $AE = ED = \frac{AB + BD}{2}$, die halbe Summe der Bogen, folglich §. 49. $BE = \frac{AB - BD}{2}$, die halbe Differenz der Bogen. Ziehet man die Sehne AD, und die

Halbmesser CB, CE: so ist $FD = \frac{AK + KD}{2}$ und aus dem vorigen Grunde $FK = \frac{AK - KD}{2}$. Endlich fälle man auf CB, von A und D, die Perpendikel AG, DH, welche die Sinus der Bogen AB, BD, sind. Da leicht erweislich, daß $\triangle AGK \sim \triangle DHK$: so ist $AG : DH = AK : KD$, folglich auch II. §. 86. $\frac{AG + DH}{2} : \frac{AG - DH}{2} = \frac{AK + KD}{2} : \frac{AK - KD}{2} = FD : FK$. Ist nun CF der Halbmesser: so ist $FD = \text{tang. } ED = \text{tang. } \frac{AB + BD}{2}$, und $FK = \text{tang. } EB = \text{tang. } \frac{AB - BD}{2}$; auch war $AG = \text{sin. } AB$, und $DH = \text{sin. } BD$. Folglich ist $\frac{\text{sin. } AB + \text{sin. } BD}{2} : \frac{\text{sin. } AB - \text{sin. } BD}{2} = \text{tang. } \frac{AB + BD}{2} : \text{tang. } \frac{AB - BD}{2}$; folglich auch $\text{sin. } AB + \text{sin. } BD : \text{sin. } AB - \text{sin. } BD = \text{tang. } \frac{AB + BD}{2} : \text{tang. } \frac{AB - BD}{2}$.

Zusatz. Daher ist auch bey jeden zwey Bogen LN, NA, die Summe ihrer Cosinus zur Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der Bogen zur Tangente der halben Differenz; oder $\text{cos. } NA + \text{cos. } LN : \text{cos. } NA - \text{cos. } LN = \text{cot. } \frac{LN + NA}{2} : \text{tang. } \frac{LN - NA}{2}$.

Denn, wenn man LA in M halbirt: so ist AM das Complement von DE zu einem Quadranten, folglich ME ein Quadrant. Nun sey MN = BE: so ist auch NB ein Quadrant, folglich NA das Complement von AB, und LN das Complement von BD. Nun war $\text{sin. } AB + \text{sin. } BD : \text{sin. } AB - \text{sin. } BD = \text{tang. } ED : \text{tang. } EB$.

Folg-

Folglich ist cos. NA + cos. LN : cos. NA — cos. LN = cotang. AM : tang. MN. Nun ist $AM = \frac{LN + NA}{2}$, und $MN = \frac{LN - NA}{2}$. Folglich ist cos. NA + cos. LN : cos. NA — cos. LN = cotang. $\frac{LN + NA}{2}$: tang. $\frac{LN - NA}{2}$.

§. 67.

In jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel fällt ein Perpendikel, von der Spitze auf die Grundlinie, innerhalb des Triangels, wenn die Winkel an der Grundlinie von einerley Gattung sind; außerhalb aber, wenn solche Winkel von verschiedner Gattung sind. Fig. 187.

Es sey ADad die Grundfläche einer Halbkugel, welche von zwey größten Cirkeln Aa, Dd, die selbst einander in B schneiden, so geschnitten werde, daß vier schiefwinklichte Triangel ABD, aBd, DBa, dBA, entstehen. Ein dritter größter Cirkel EBe schneide die Grundfläche senkrecht: so lehrt der Anblick, daß der Perpendikel BE oder Be, innerhalb der Triangel ABD, aBd, falle, wo an der Grundlinie AD zwey spitze, und an der Grundlinie ad zwey stumpfe Winkel sind; daß hingegen solcher Perpendikel außerhalb der Triangel DBa, dBA, falle, wo an der Grundlinie Da, der eine Winkel D, stumpf, der andre a, spitz, und an der Grundlinie dA, der eine d, spitz, der andre A, stumpf ist.

Der Beweiß des Satzes gründet sich auf §. 63. woraus man leicht ersiehet, daß im Fall des Gegentheils der Perpendikel zugleich kleiner und größer als ein Quadrant seyn müßte, welches unmöglich ist.

Zusatz. 1. Durch den Perpendikel BE wird jeder schiefwinklichte Triangel, wie ABD, ABd, auf zwey

rechtwinklichte gebracht; ersterer auf ABE, EBD; letzterer auf dBE, EBA. Die Theile der Grundlinie, welche von dem Perpendikel und den Schenkeln begrenzt werden, heißen die Abschnitte der Grundlinie, wie AE, ED; oder dA, AE. Die Winkel, welche der Perpendikel mit den Schenkeln einschließt, heißen die Abschnitte des Scheitels, wie ABE, EBD; oder dBE, EBA. Auch sagt man z. E. daß die Abschnitte AE, ABE, dem Schenkel AB, und dem Winkel A, anliegend, hingegen dem Schenkel DB, und dem Winkel D, entgegengesetzt sind; und so in allen Fällen.

2. Auch siehet man leicht, daß das, was von einem dieser vier Triangel Fig. 187. gefunden wird, sich auf die übrigen, doch mit gehörigen Unterschiede anwenden lasse; und daß aus dem bloßen Anschauen der Figur erhelle: von welcher Gattung das Gesuchte in jedem Triangel sey, wohin der Perpendikel jedesmal fallen müsse, und in welchem Falle die Segmente der Grundlinie und des Scheitels zu addiren, oder zu subtrahiren sind.

3. Ferner ist leicht einzusehen, wenn in einem schiefwinklichten Triangel BKD, Fig. 185. eine Seite BK, ein Quadrant wäre, wie man statt dieses Triangels einen rechtwinklichten setzen könne, durch dessen Auflösung zugleich ersterer aufgelöst ist. Denn nimmt man hiezu einen Quadranten BL, und legt durch L und K einen größten Cirkel: so sind §. 60. K und L rechte Winkel, und KL das Maaß des Winkels B; auch ist DL das Complement von BD, und DKL das Complement von BKD. Sind daher drey Stücke in dem Triangel BKD, gegeben: so hat man auch die nöthigen Stücke in dem Triangel KDL; und ist dieser, so ist auch jener aufgelöset.

[illegible]

§. [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$\cos. \frac{AB + BD}{2} : \cos. \frac{AB - BD}{2} = [\text{illegible}] : \frac{AB + BD}{2}$

[illegible] $\frac{AB - BD}{2}$

Die Cosinus der halben Summe der [illegible] gleichen [illegible] zur Tangente der halben [illegible] wie der [illegible] der halben Summe der [illegible] zur Tangente der halben Differenz; oder [illegible]

[illegible] ABC, EBD; [illegible] Die [illegible] Geometrie [illegible] [illegible] ABC, ED; [illegible] Die [illegible] der [illegible] Winkel [illegible] ABC, EBD, [illegible] ABF, den [illegible] [illegible] Winkel [illegible] [illegible] [illegible].

2. Auch [illegible] ABC, [illegible] Fig. 181 [illegible] [illegible] [illegible].

3. [illegible] Triangel ABC, Fig. 181 [illegible] Triangel [illegible] L [illegible] KL [illegible] B; [illegible] DKL [illegible] KBD. [illegible] Triangel [illegible] [illegible].

§. 68.

In jedem schiefwinklichten sphärischen Triangel ABD, Fig. 187. sind

1. die Sinus der Winkel, wie die Sinus der entgegengesetzten Schenkel; oder sin. D : sin. A = sin. AB : sin. BD.

2. Die Cosinus der Abschnitte des Scheitels, wie die Tangenten der entgegengesetzten Schenkel; oder cos. DBE : cos. ABE = tang. AB : tang. DB.

3. Die Sinus der Abschnitte der Grundlinie, wie die Tangenten der entgegengesetzten Winkel; oder sin. AE : sin. DE = tang. D : tang. A.

4. Die Cosinus der Abschnitte der Grundlinie, wie die Cosinus der anliegenden Schenkel; oder cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. DB.

5. Die Sinus der Abschnitte des Scheitels, wie die Cosinus der anliegenden Winkel; oder sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D.

6. Die Cotangente der halben Summe der Abschnitte der Grundlinie zur Tangente der halben Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der Schenkel zur Tangente der halben Differenz; oder

$$\text{cot.}\ \frac{AE + ED}{2} : \text{tang.}\ \frac{AE - ED}{2} = \text{cot.}\ \frac{AB + BD}{2} : \text{tang.}\ \frac{AB - BD}{2}.$$

7. Die Tangente der halben Summe der Abschnitte des Scheitels zur Tangente der halben Differenz, wie die Cotangente der halben Summe der übrigen Winkel zur Tangente der halben Differenz; oder,

$$\text{tang.}\ \frac{ABE + DBE}{2} : \text{tang.}\ \frac{ABE - DBE}{2} = \text{cotang.}\ \frac{A + D}{2} : \text{tang.}\ \frac{A - D}{2}.$$

Denn theilet man den schiefwinklichten Triangel ABD, mittelst des Perpendikels BE, in die beyden rechtwinklichten Triangel ABE, DBE, und wendet die Gesetze des §. 62. auf dieselben an: so ist:

Nach dem ersten Gesetze, in △BED, r : sin. BD = sin. D : sin. BE, und im △ABE, r : sin. AB = sin. A : sin. BE; folglich II. §. 81. sin. AB : sin. BD = sin. D : sin. A.

Nach dem zweyten Gesetze, r : tang. DB = cos. DBE : tang. BE, und r : tang. AB = cos. ABE : tang. BE; folglich tang. AB : tang. DB = cos. DBE : cos. ABE.

Nach dem dritten Gesetze r : tang. D = sin. DE : tang. BE, und r : tang. A = sin. AE : tang. BE; folglich tang. D : tang. A = sin. AE : sin. DE.

Nach dem vierten Gesetze: r : cos. BE = cos. DE : cos. BD, und r : cos. BE = cos. AE : cos. AB; folglich cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. BD.

Nach dem fünften Gesetze, r : cos. BE = sin. DBE : cos. D, und r : cos. BE = sin. ABE : cos. A: folglich sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D.

Ferner, da nach dem vierten Gesetze der schiefwinklichten Triangel, cos. AE : cos. DE = cos. AB : cos. DB; folglich auch cos. AE + cos. DE : cos. AE — cos. DE = cos. AB + cos. DB : cos. AB — cos. DB; so ist §. 66.

cot.

$\cot. \frac{AE + DE}{2} : \text{tang.} \frac{AE - DE}{2} = \cot. \frac{AB + DB}{2} : \text{tang.} \frac{AB - DB}{2}.$

Endlich, da nach dem fünften Gesetze der schiefwinklichten Triangel, sin. ABE : sin. DBE = cos. A : cos. D; folglich auch sin. ABE + sin. DBE : sin. ABE — sin. DBE = cos. A + cos. D : cos. A — cos. D; so ist §. 66. $\text{tang.} \frac{ABE + DBE}{2} : \text{tang.} \frac{ABE - DBE}{2} = \cot. \frac{A + D}{2} : \text{tang.} \frac{A - D}{2}.$

Zusatz. Diese Gesetze gelten eben so von den übrigen Triangeln der Fig. 187. wenn man an gehöriger Stelle die gleichlautenden kleinen Buchstaben setzt.

§. 69.

Aufgabe: In einem schiefwinklichten sphärischen Triangel ABD, sind drey Stücke gegeben; man soll die übrigen berechnen. Fig. 187.

Erstlich, wenn zwey Seiten BA, AD, und der eingeschlossene Winkel A gegeben sind, und man fodert

1) die Seite BD: so suche man nach §. 62, 2. aus AB und A den einen Abschnitt der Grundlinie AE, und man hat auch den andern ED = AD — AE. Hierauf suche man nach §. 68, 4. aus AE, ED, AB, den cos. BD.

2. Den Winkel D: so suche man wie vorher AE, ED, und hieraus und dem Winkel A nach §. 68, 3. den tang. D.

Zweytens, wenn zwey Seiten BA, BD, und ein entgegengesetzter Winkel A, gegeben sind, und man fodert

1) die Seite AD: so suche man nach §. 62, 2. AE, und hieraus nach §. 68, 4. cos. ED, da denn nach §. 67. ED addirt, oder subtrahirt wird, um AD zu finden.

2) Den Winkel ABD: so suche man nach §. 62, 6. ABE und hieraus nach §. 68, 2. EBD.

3) Den Winkel D: so sucht man solchen nach §. 68, 1.

Drittens, wenn zwey Winkel, A, B, mit der anliegenden Seite AB gegeben sind, und man fodert

1) den Winkel D: so sucht man nach §. 62, 6. ABE, und man hat EBD, und hieraus nach §. 68, 5. den Winkel D.

2) Die Seite BD: so suche man wie vorher ABE, DBE, und hieraus nach §. 68, 2. tang. BD.

Viertens, wenn zwey Winkel A, D, und die entgegengesetzte Seite AB, gegeben sind, und man fodert

1) den Winkel B: so sucht man nach §. 62, 6. ABE, und hieraus nach §. 68, 5. DBE.

2) Die anliegende Seite AD: so sucht man nach §. 62, 2. AE, und hieraus nach §. 68, 3. ED.

3) Die entgegengesetzte Seite BD: so sucht man solche nach §. 68, 1.

Fünftens, wenn drey Seiten gegeben sind, und man fodert einen Winkel, etwa A: so sucht man aus AB, BD, und $\frac{1}{2}$ AD, nach §. 68, 6. $\frac{AE - ED}{2}$, und hieraus AE. Endlich hieraus nach §. 62, 2. den Winkel A.

Sechstens, wenn drey Winkel gegeben sind, und man fodert eine Seite, etwa AB: so sucht man aus A, D, und $\frac{1}{2}$ ABD, nach §. 68, 7. tang. $\frac{ABE - EBD}{2}$, und hieraus ABE. Endlich hieraus nach §. 62, 6. die Seite AB.

Anmerkung. Daß hierinnen alle Fälle vorkommen, erhellet aus folgender Uebersicht:

I. Es wird ein Winkel gesucht, und es sind gegeben

1. Drey Seiten. num. 5.
2. Zwey Seiten, und ein Winkel; und zwar
   a. Zwey Seiten, welche den gegebenen Winkel einschließen. num. 1, 2.
   b. Zwey Seiten, welche den gesuchten Winkel einschließen. num. 2, 2.
   c. Zwey Seiten, welche den dritten Winkel einschließen. num. 2, 3.
3. Eine Seite und zwey Winkel; und zwar
   a. die Seite zwischen den gegebenen Winkeln. num. 3, 1.
   b. Die Seite zwischen einem gegebenen Winkel und dem gesuchten. num. 4, 1.

II.

II. Es wird eine Seite gesucht, und es sind gegeben

1. Drey Winkel. num. 6.

2. Zwey Winkel und eine Seite; und zwar

   a. Zwey Winkel an der gegebenen Seite. num. 3, 2.

   b. Zwey Winkel an der gesuchten Seite. num. 4, 2.

   c. Zwey Winkel an der dritten Seite. num. 4, 3.

3. Ein Winkel und zwey Seiten; und zwar

   a. der Winkel zwischen den gegebenen Seiten. num. 1, 1.

   b. Der Winkel zwischen einer gegebenen und der gesuchten Seite. num. 2, 1.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lorenz, Johann Friedrich, 1738-1807

Die Elemente der Mathematik in sechs Büchern in 6 Büchern mit 1 Anhange

Bd.: Erster Theil

Leipzig 1785

Math.u. 110-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594093-5
VD18 14496208-001